

Geschichtliches.

● **Enriques, Federico:** *Gli elementi d'Euclide e la critica antica e moderna.* Vol. 4, libri 11—13. Bologna: Nicola Zanichelli 1936. L. 30.—

Vorangestellt ist eine allgemeinesgeschichtliche Einleitung (11 S.), die die weitere Entwicklung bis zur Neuzeit skizziert. Die Übersetzung selbst ist mit zahlreichen erklärenden Noten versehen. Damit ist die italienische Euklidausgabe vollständig abgeschlossen.

O. Neugebauer (Kopenhagen).

Klein, Jacob: *Die griechische Logistik und die Entstehung der Algebra.* II. Quell. Stud. Gesch. Math. B 3, 122—235 (1936).

I. vgl. dies. Zbl. 10, 244. Der zweite und umfangreichere Teil der Kleinschen Abh. verfolgt die Wandlung des Zahlbegriffs von Diophant bis zu Wallis. Während für die griechische Mathematik die Zahlen Anzahlen von Einsen waren und die Seinsweise dieser Einsen ein von Philosophen und Mathematikern vielumstrittenes Problem bildete (vgl. d. 1. Teil d. Abh.), vollzog sich seit Vieta die Wandlung der Zahlen zu symbolisch begriffenen und symbolisch dargestellten Wesen, deren Sein gar kein Problem mehr bietet. Dieser Prozeß wurde begleitet von der Ausweitung der ursprünglichen arithmetica numerosa zur arithmetica speciosa und mathesis universalis, wodurch erst die analytische Geometrie und die moderne theoretische Physik ermöglicht war. Nach einem einleitenden Paragraphen über die Differenz antiker und moderner Begrifflichkeit gliedert Verf. seinen Stoff nach den Namen der für den geschilderten Vorgang bedeutendsten Mathematiker: Diophant, Vieta, Stevin, Descartes, Wallis. Seine Darstellung bietet eine sorgfältige Interpretation und in diesem Zusammenhang entscheidenden Stellen ihrer einschlägigen Werke, sie bietet aber noch weit mehr: Verf. geht allen Beziehungen zu ihren gelehrten Zeitgenossen nach und breitet vor Augen des Lesers eine geradezu überwältigende Fülle für die mathematische Ideengeschichte bedeutsamsten und sonst wohl nirgend so zusammengestellten Materials aus.

Bessel-Hagen (Bonn).

Drenckhahn, Friedrich: *Zur Zirkulatur des Quadrats und Quadratur des Kreises in den Śulvasūtra.* Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. 46, Abt. 1, 1—13 (1936).

Verf. versucht, die Vorschriften zur Zirkulatur des Quadrats und Quadratur des Kreises in den Śulvasūtras von Âpastamba, Baudhâyana und Kâtyâyana von einem Gesichtspunkt aus zu deuten. Die den drei Sūtras gemeinsame als anschauliche Zeichnungsregel erklärable Vorschrift zur Zirkulatur, die den Radius R eines Kreises mit der Seite a und der Diagonale d eines ihm flächengleichen Quadrats durch die Beziehung $R = \frac{a}{2} + \frac{1}{3} \left(\frac{d}{2} - \frac{a}{2} \right)$ verknüpft, ergibt für den Kreisdurchmesser die Grundgleichung $D = \frac{2 + \sqrt{2}}{3} a$. Eine der Vorschriften zur Quadratur des Kreises $\left(a = \frac{13}{15} D \right)$ ist aus dieser Gl. heraus erklärbar, falls man $\sqrt{2} \approx \frac{7}{5}$ setzt und einen Denkfehler annimmt. Eine kompliziertere, nur von Baudhâyana erwähnte rechnerische Quadraturvorschrift

$$a = \left(\frac{7}{8} + \frac{1}{8 \cdot 29} - \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6} + \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6 \cdot 8} \right) D$$

kann auf dem Umwege über $D = f(d)$ schrittweise aus der Grundgl. hergeleitet worden sein. Die indischen Quadraturen können mit bekannten Methoden der anderen Kulturvölker in der nämlichen Zeit nicht in Verbindung gesetzt werden; ihre indische Herkunft ist gegenwärtig nicht mehr anzuzweifeln. *Dijksterhuis* (Oisterwijk, Holland).

Singh, Avadhesh Narayan: A review of Hindu mathematics up to the 12th century. *Archeion* 18, 43—62 (1936).

Antoniadi, E. M.: L'astronomie des prêtres égyptiens. *Scientia* 59, 297—304 (1936).

Das Bild, das sich der Verf. von der ägyptischen Astronomie durch seine Beschränkung auf griechische Darstellungen gebildet hat, ist seit der Entzifferung der Hieroglyphen durch Fr. Champollion (1822) überholt. *O. Neugebauer* (Kopenhagen).

Mondolfo, Rodolfo: Su una presunta affermazione antica della sfericità terrestre e degli antipodi. *Archeion* 18, 7—17 (1936).

● **Bibliographia Kepleriana.** Ein Führer durch das gedruckte Schrifttum von Johannes Kepler. Hrsg. v. Max Casper. Unter Mitarbeit v. Ludwig Rothenfelder. München: C. H. Beck 1936. 158 S. + 80 Faksimile. geb. RM. 18.50.

Vollständige und in verschiedenen Punkten Neues enthaltende Bibliographie Keplers. Ein großer Teil der wichtigeren Titel sind in Faksimile reproduziert. Außerdem sind den einzelnen Titeln kurze Kommentare bzw. Textauszüge beigelegt, so daß es sich de facto um einen Führer durch die Kepler-Literatur (auch die moderne) handelt, der auch als Vorarbeit zu einer Gesamtausgabe von Keplers Werken gedacht ist.

O. Neugebauer (Kopenhagen).

Algebra und Zahlentheorie.

Fitting, F.: Doppelsymmetrische Rösselsprünge auf Quadraten von ungerader Felderzahl ohne Mittelfeld. *Jber. Deutsch. Math.-Vereinig.* 46, Abt. 1, 38—43 (1936).

In den $n(n+1)$ Feldern eines links unten liegenden rechteckigen Teils eines Quadrates von $(2n+1)^2$ Feldern schreibt man a, b, c, \dots dermaßen ein, daß der Übergang zwischen zwei aufeinanderfolgenden Buchstaben jedesmal durch einen Springerzug erfolgt. Dreht man das Quadrat $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$, so kommen diese Buchstaben auch in die vier übrigen Rechtecke. Nun versucht man $n(n+1)$ mit verschiedenen Buchstaben besetzte Felder mittels Springerzügen zu einer „Rundreise“ zu verbinden, wobei man schließlich auf das Anfangsfeld zurückkehrt und jedes andere Feld nur einmal berührt. Durch Drehungen erscheint diese „Rundreise“ viermal, und man hat einen doppelsymmetrischen 4-kettigen Rösselsprung. Verf. gibt ein Verfahren an, um daraus andere 4-, 2-, 1-kettige Rösselsprünge abzuleiten und bestimmt für $n=3$ die Anzahl der 1-kettigen.

N. G. W. H. Beeger (Amsterdam).

Pólya, Georges: Sur le nombre des isomères de certains composés chimiques. *C. R. Acad. Sci., Paris* 202, 1554—1556 (1936).

L'auteur considère 4 équations fonctionnelles, chacune satisfaite par une série entière de centre 0, unique, avec un rayon de convergence $\neq 0$ et un seul point singulier sur l'axe réel positif. L'une de ces séries a été introduite par Cayley; son $n^{\text{ème}}$ coefficient est le nombre des root-trees de n noeuds. Dans les 3 autres le même coefficient a également une signification combinatoire, relative aux alcools isomères de la formule moléculaire $C^n H^{2n+1} OH$.

L'introduction de ces séries permet à l'auteur de préciser les remarques souvent faites au sujet de la rapidité avec laquelle, dans les séries chimiques homologues, le nombre des isomères augmente avec le nombre des atomes C et de donner des expressions asymptotiques pour le nombre de certains isomères.

S. Bays (Fribourg).

Littlewood, D. E.: A theorem on alternants. *Proc. Edinburgh Math. Soc., II.* s. 4, 262 (1936).

Unmittelbarer Beweis eines in einem Aufsatz von Zia-ud-Din (dies. Zbl. 8,385) enthaltenen Satzes über Alternanten. Der Verf. knüpft an Überlegungen in einem früheren Aufsatz (dies. Zbl. 9, 202) an.

L. Schrutka (Wien).

Rados, Gustav: Über den Rang von adjungierten Determinanten. *Mat. természett. Értes.* 54, 309—322 u. deutsch. Zusammenfassung 323—324 (1936) [Ungarisch].

Gegeben sei die Determinante $A = [a_{ij}]^n$ n -ten Grades; sie hat $r = \binom{n}{k}$ Minoren

k -ten Grades A_{ij} , und $D_k = [A_{ij}]_1^r$ heißt die k -te adjungierte Determinante von A . Es wird bewiesen: ist die Rangzahl von A gleich r , so ist der Rang von D_k gleich $\binom{r}{k}$. Zum Schluß folgen Anwendungen. Otto Szász (Cincinnati, Ohio).

Rados, Gustav: Über den Rang der Kroneckerschen Determinanten. Mat. termész. et. Ért. 54, 325—335 u. deutsch. Zusammenfassung 336 (1936) [Ungarisch].

Gegeben seien zwei Determinanten $A = [a_{ik}]_1^m$, $B = [b_{ik}]_1^n$ vom Grade m bzw. n . Die Kroneckersche Determinante K ist vom Grade $m \cdot n = r$, und hat zu Elementen alle Produkte $a_{ik} b_{\ell\mu}$. Es wird mit Hilfe des Matrizenkalküls bewiesen: haben A und B den Rang r_1 bzw. r_2 , so ist der Rang von K : $r_1 \cdot r_2$. Otto Szász (Cincinnati, Ohio).

Petterson, Erik L.: Einige Bedingungen für die Anzahl und die Gradzahlen der Faktoren gewisser ganzzahliger Polynome. Math. Z. 41, 200—212 (1936).

Ist ein normiertes Polynom $f(x)$ reduzibel und ist $g(x)$ ein beliebiges normiertes Polynom, so ist die Resultante $R(f, g) = R$ in ganzzahlige Faktoren zerlegbar, von denen jeder je einem Faktor von $f(x)$ entspricht. Ist nun E eine ganze Zahl und ist $(E, R) = 1$, so ist $R_\lambda^P \equiv 1 \pmod{E}$, wobei $f(\xi_\mu) = 0$, P der gemeinsame Exponent der Zahlen $g(\xi_\mu)$ modulo E und $R = \prod_\lambda R_\lambda$ ist. — Wählt man dabei $g(x)$ so, daß $g(\xi_\mu)$

sicher keine Einheiten sind, so kann man eine obere Grenze für die Anzahl der Faktoren von $f(x)$ bestimmen. — Daraus erhält der Verf. einige neue Irreduzibilitätskriterien. N. Tschebotaröw (Kasan).

Gouwens, Cornelius: The decomposition of $4(x^p - 1)/(x - 1)$. Amer. Math. Monthly 43, 283—284 (1936).

Delaunay, B., J. Sominski et K. Billevitch: Table des corps algébriques totalement réels du quatrième degré. Bull. Acad. Sci. URSS, VII. s. Nr 10, 1267—1297 u. franz. Zusammenfassung 1297 (1935) [Russisch].

Die Arbeit enthält die Tabelle sämtlicher total reeller Körper vierten Grades, deren Diskriminanten ≤ 8112 , nur Körper mit alternierender Gruppe ausgenommen, samt einer Darlegung der geometrischen Methode, mit deren Hilfe diese Tabelle berechnet wurde. — Jeder Zahl des zu betrachtenden total reellen algebraischen Zahlkörpers n -ten Grades wird der Punkt des n -dimensionalen Raumes zugeordnet, dessen Koordinaten x_1, x_2, \dots, x_n sämtliche mit ihr konjugierte Zahlen sind. Demnach liegen alle rationalen Zahlen auf der Geraden $x_1 = x_2 = \dots = x_n$, und allgemeiner die Zahlen eines Unterkörpers auf einer Mannigfaltigkeit vom Typ $x_1 = x_2 = \dots = x_\mu$; $x_{\mu+1}, x_{\mu+2}, \dots, x_{2\mu}$; \dots ; $x_{n-\mu+1}, x_{n-\mu+2}, \dots, x_n$. — Fassen wir nur die ganzen Zahlen des Körpers ins Auge, so entspringt dadurch ein parallelepidales Gitter, dessen erzeugende Vektoren den Zahlen einer Minimalbasis entsprechen. Das Quadrat des Volumens des von diesen Vektoren erzeugten „Grundparallelepiped“ ist gleich der Diskriminante L des Körpers. Die Menge der zu allen Körpern dieser Art entsprechenden Gitterpunkte ist diskret. Demnach enthält jedes Parallelepiped mit dem Volumen $> \sqrt{L}$ eine endliche Anzahl solcher Gitterpunkte, von denen jeder je einen Körper von verlangter Eigenschaft erzeugt, so daß kein Körper mit der Diskriminante $\leq L$ ausgelassen wird. Darin liegt das Grundprinzip der Berechnungsmethode der Tabelle. — Für $n = 4$ suchen die Verff. die ganzzahligen Gleichungen $x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q = 0$, die als Repräsentanten aller total reellen biquadratischen Körper mit den Diskriminanten $\leq L$ erscheinen. Die obigen Überlegungen führen zu folgenden Beschränkungen für m, n, p, q : $m = 0, 1, 2, 3$:

$$\left| \frac{3m^2}{4} - 2n \right| \leq \sqrt[3]{\frac{L}{2}}; \quad p \leq \left| \frac{\sqrt[6]{\frac{L}{2}} \cdot \sqrt[3]{3}}{27} - \frac{m^3 - 4mn}{8} \right|; \quad |q| \leq |3mpn - n^2|$$

oder

$$|q| \leq \left(\frac{m^2 - \sqrt[3]{\frac{L^2}{4}}}{16} \right)^2$$

Es gibt insgesamt 40 total reelle biquadratische Körper, deren Gruppen von der alternierenden Gruppe verschieden sind und deren Diskriminanten innerhalb des Intervalles (725, 8112) liegen. Unter ihnen besitzen 10 die symmetrische Gruppe, 18 die Gruppe 8. Ordnung, 6 die Vierergruppe und 6 die zyklische Gruppe. — In der Arbeit ist auch eine einfache Methode der Umkehrung der Tschirnhausenschen Aufgabe für Gleichungen 4. Grades dargelegt.

N. Tschebotarow (Kasan).

Rédei, L.: Über zwei Mittelwertfragen im quadratischen Zahlkörper. Mat. természett. Értes. 54, 45—112 u. deutsch. Zusammenfassung 113—116 (1936) [Ungarisch].

Es sei $D > 0$ die Diskriminante eines quadratischen Zahlkörpers; D enthalte keinen Primfaktor der Gestalt $4l + 3$; e_4 sei die Anzahl der durch 4 teilbaren Invarianten seiner absoluten Klassengruppe. Es handelt sich um die Häufigkeit, mit der e_4 einen festen Wert annimmt. Ein Hauptresultat ist: sei die Anzahl n der verschiedenen Primfaktoren von D fest gegeben; unter den ersten x solchen D sei x_e die Anzahl derer, für die $e_4 = e$ ist; die Existenz des Grenzwertes $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x_e}{x} = n_e$ wird bewiesen und sein Wert berechnet. Weitere Resultate hängen mit früheren Untersuchungen des Verf. (dies. Zbl. 10, 338) eng zusammen.

Otto Szász (Cincinnati, Ohio).

Rédei, L.: Über die Pellsche Gleichung $t^2 - du^2 = -1$. Mat. természett. Értes. 54, 1—42 u. deutsch. Zusammenfassung 43—44 (1936) [Ungarisch].

Damit die Gleichung $(P): t^2 - du^2 = -1$ ($d > 0$, ganzzahlig) eine nichttriviale ($u \neq 0$) Lösung in ganzzahligen t, u besitze, ist offenbar notwendig, daß -1 quadratischer Rest mod d sei; d. h. d enthält nur Primfaktoren $p \equiv 1 \pmod{4}$ und evtl. den Faktor 2. Es sei d keine Quadratzahl; bekanntlich ist die Gleichung (P) dann und nur dann lösbar, wenn die Periode der Kettenbruchentwicklung von \sqrt{d} eine ungerade Anzahl von Gliedern hat. In neueren Untersuchungen (P. Epstein, dies. Zbl. 9, 295) handelt es sich um Lösbarkeitskriterien, die die Kettenbruchentwicklung nicht benutzen. Der Verf. verallgemeinert Epsteins Resultate und beweist unter anderem den Satz: es bezeichne e das Produkt der in d in ungerader Potenz auftretenden verschiedenen Primfaktoren, f das Produkt der Primfaktoren, die in d in gerader Potenz aufgehen; für eine Zerlegung $e = ab$ ($a > 1, b > 1$) sei $\left(\frac{b}{p}\right) = \left(\frac{a}{q}\right) = 1$ für jeden Primfaktor p von a und jeden Primfaktor q von b ; ferner sei $\left(\frac{e}{p}\right) = -1$, falls p Primfaktor von f , und schließlich $\left(\frac{a}{b}\right)_4 = \left(\frac{b}{a}\right)_4 = -1$; dann ist (P) lösbar. $\left(\frac{a}{b}\right)_4$ ist das biquadratische Restsymbol.

Otto Szász (Cincinnati, Ohio).

Gruppentheorie.

Sagastume Berra, Alberto E.: Über die Gruppentheorie. An. Soc. Ci. Argent. 120, 262—309 (1935) [Spanisch].

Die Arbeit ist eine Einführung in die Gruppentheorie. Sie enthält die Definition der Gruppen, Untergruppen, Normalteiler, Faktorgruppen und Kommutatorgruppen und bringt dann den Zusammenhang zwischen endlichen Gruppen und Permutationsgruppen, die Darstellungstheorie endlicher Gruppen, die Herleitung der Charakterrelationen, die Theorie der freien Gruppen f_n und der Faktorgruppen von f_n , d. h. der Gruppen mit den Erzeugenden A_1, A_2, \dots, A_n , zwischen welchen gewisse Relationen $R(A_i) = E$ bestehen. Verf. ergänzt die Sätze durch viele Beispiele. Landherr.

● **Corral, José Isaac: Substitutionsbrigaden. Tl. 1. Eigenschaften der Brigaden. Tl. 2. Imperfekte Brigaden.** Habana: Rambla, Bouza y Ca. 1934 u. Toledo: A. Medina 1935. X, 358 S. [Spanisch].

Kurze Inhaltsangabe: Pt. 1, Kap. 1—3: Substitutionen, perfekte Substitutionsbrigaden, Indizes derselben. Pt. 2, Kap. 4—6: Die imperfekten Brigaden einer Gleichung, Teiler (d. h. Unterbrigaden) derselben, spezielle Substitutionsbrigaden. — 5 weitere Kapitel sind angekündigt, sowie für später Anwendungen der Brigaden auf Polyeder- und Modulfunktionen. —

Der zentrale Begriff dieser Monographie, die „Brigade“, ist in der Literatur unter dem Namen Nebengruppe (assoziierte Gruppe) geläufig und natürlich auch im Falle des Index 2 („perfekte Brigade“, andernfalls „imperfekt“) nicht, wie Verf. glaubt, neu. Die bisher erschienenen Kapitel scheinen mir im wesentlichen eine teilweise Wiedergabe von Serrets Höherer Algebra zu sein, indem systematisch in jedem Satze, der mit Gruppen operiert, der Begriff der Gruppe durch den der Brigade ersetzt wird. Die Algebra der letztvergangenen Jahrzehnte ist nicht berücksichtigt. — Zahlreiche störende Ungenauigkeiten. *Th. Motzkin* (Jerusalem).

Miller, G. A.: Groups in which the squares of the operators generate a cyclic group. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 22, 288—291 (1936).

Es wird gezeigt, daß es für $m > \alpha + 1$ $5(m - \alpha) - 6$ verschiedene Gruppen der Ordnung 2^m gibt, in denen die Quadrate der Gruppenelemente eine zyklische Untergruppe der Ordnung 2^α erzeugen. *Magnus* (Frankfurt a. M.).

Coxeter, H. S. M.: An abstract definition for the alternating group in terms of two generators. J. London Math. Soc. 11, 150—156 (1936).

Die alternierende Gruppe des Grades n läßt sich definieren durch zwei Erzeugende R und S , zwischen denen im Falle $n = 2m$ bzw. $n = 2m + 1$ die definierenden Relationen

$$R^{2m-1} = S^{2m-1} = (RS)^m = (R^{-1}S)^3 = (R^{-1}S^{-1}RS)^2 = 1 \quad (l = 1, 2, \dots, m-2) \\ \text{bzw.} \quad R^{2m+1} = S^{2m+1} = (RS)^m = (R^{-1}S)^3 = (R^{-1}S')^2 = 1 \quad (l = 2, 3, \dots, m)$$

bestehen.

Magnus (Frankfurt a. M.).

Wielandt, Helmut: Eine Kennzeichnung der direkten Produkte von p -Gruppen Math. Z. 41, 281—282 (1936).

Es wird ein sehr einfacher Beweis für den folgenden Satz gegeben: Ist \mathfrak{H} eine endliche Gruppe, \mathfrak{K} eine invariante Untergruppe von \mathfrak{H} , so daß $\mathfrak{H}/\mathfrak{K}$ direktes Produkt ihrer Sylowgruppen ist, und erzeugt jedes System von Elementen, das mit \mathfrak{K} zusammen \mathfrak{H} erzeugt, auch für sich allein schon \mathfrak{H} , so ist auch \mathfrak{H} direktes Produkt ihrer Sylowgruppen. Die Umkehrung dieses Satzes war für den Fall, daß \mathfrak{K} die Kommutatorgruppe von \mathfrak{H} ist, schon lange bekannt.

Magnus (Frankfurt a. M.).

Todd, J. A.: A second note on the linear fractional group. J. London Math. Soc. 11, 103—107 (1936).

In Erweiterung einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 5, 50) wird für die unimodulare linear gebrochene binäre Substitutionsgruppe modulo p^n [mit $LF(2, p^n)$ oder $PSL(2, p^n)$ bezeichnet] eine neue abstrakte Definition bei ungerader Primzahl p und $p = 2$ gegeben. Für ungerade p wählt man als Erzeugende

$$S_i: x' = x + \varepsilon^i, \quad R: x' = \varepsilon^2 x + 1, \quad U: x' = \frac{-1}{x-1},$$

wobei ε eine zugehörige primitive Einheitswurzel ist. Die Relationen legen zunächst die Ordnungen dieser Operationen fest, sodann folgen die Vertauschbarkeitsbeziehungen der S_i unter sich und mit R . Dabei ist bemerkenswert, daß darin die Koeffizienten der Gleichung $\varepsilon^n = \sum a_i \varepsilon^i$ als Potenzen der Erzeugenden eingehen. Für $p = 2$ sind nur kleine Abänderungen nötig. *J. J. Burckhardt* (Zürich).

Rees, P. K.: Transforms of Fuchsian groups. Bull. Amer. Math. Soc. 42, 229—231 (1936).

T and G are transformations of a Fuchsian group: $z' = \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}}$; $S = GTG^{-1}$, g , g_i and g'_i the centers of the isometric circles of G , T and T^{-1} , m the midpoint of the segment g_i, g'_i ; $g' = 1/\bar{g}$, Q_5 (Q_6) is the circle with the origin and the point g (g') as opposite ends of a diameter, r_s and r_t are the radii of the isometric circles of S and T . The author proves: the necessary and sufficient condition that $r_s = r_t$ is that m be on Q_5 or Q_6 ; the condition that $r_s < r_t$ is that m be outside both Q_5 and Q_6 , or inside both, etc. He gives the locus of m if $r_s = k r_t$, k being a non negative real number.

O. Bottema (Deventer, Holland).

Suschkewitsch, A.: Sur quelques propriétés des semigroupes généralisés. Commun. Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff et Soc. Math. Kharkoff, IV. s. 13, 29—33 (1936).

Es werden Systeme \mathfrak{S} von Elementen A, B, C, \dots betrachtet, zwischen denen eine assoziative Verknüpfung (Multiplikation) definiert ist, so daß \mathfrak{S} gegenüber dieser Verknüpfung abgeschlossen ist, und so daß außerdem die linksseitige Inverse eindeutig bestimmt ist, d. h. daß aus $BA = CA$ stets $B = C$ folgt. Es gilt: Alle idempotenten Elemente von \mathfrak{S} sind Rechtseinheiten von \mathfrak{S} und umgekehrt. Seien E_λ ($\lambda = 1, 2, \dots$) die Rechtseinheiten von \mathfrak{S} , so läßt sich \mathfrak{S} zerlegen in $\sum E_\lambda \mathfrak{S} + \mathfrak{R}$, wobei die $E_\lambda \mathfrak{S}$ isomorphe Systeme mit denselben Eigenschaften wie \mathfrak{S} sind und \mathfrak{R} keine idempotenten Elemente mehr enthält. Die Systeme $E_\lambda \mathfrak{S}$ lassen sich noch weiter zerlegen; es läßt sich von ihnen noch eine Gruppe und eine gewöhnliche Semigruppe abspalten. Die Menge der E_λ braucht nicht abzählbar zu sein. Magnus (Frankfurt a. M.).

Mengenlehre und reelle Funktionen.

Hausdorff, F.: Summen von \aleph_1 Mengen. Fundam. Math. 26, 241—255 (1936).

Verf. beweist ohne Kontinuumhypothese (jedoch das Auswahlprinzip annehmend), daß jeder separable vollständige Raum als eine Summe von \aleph_1 wachsenden G_δ -Mengen darstellbar ist. Die vom Verf. gefundenen Darstellungen sind k - und m -konvergent. Dabei nennt Verf. eine Summe $X = \sum_\alpha X^\alpha$ von wachsenden Mengen X^α k -konvergent,

wenn $X - X^\alpha$ schließlich von 1. Kategorie in X ist, m -konvergent, wenn für jede absolut additive, endliche, nichtnegative Maßfunktion $|A|$ schließlich $|X - X^\alpha| = 0$ ist. Verf. betont, daß die Frage, ob die k -divergenten bzw. die m -divergenten Darstellungen existieren, außerordentlich schwierig zu sein scheint. Im § 2 untersucht Verf. die Zerlegung des Raumes 2^X der abgeschlossenen Mengen A eines kompakten Raumes X nach dem Index der ersten perfekten Ableitung von A . Es ergibt sich, daß diese Zerlegung aus Borelschen Mengen besteht. Die entsprechenden Partialsummen bilden eine wachsende Folge von Borelschen Mengen, welche k - und m -konvergent ist. Kolmogoroff.

Piccard, Sophie: Une propriété générale des familles d'ensembles. Fundam. Math. 26, 262—266 (1936).

Bezeichnet Φ_σ bzw. Φ_δ bzw. Φ_e die Klasse von Mengen, die aus Mengen einer gegebenen Klasse Φ durch abzählbare Summierung bzw. Durchschnitts- bzw. Differenzbildung entstehen (wie z. B. Borelsche Mengenklassen $F_\sigma, F_{\sigma\delta}, F_{\sigma\delta\sigma}, \dots$ aus der Klasse F abgeschlossener Mengen), so entsteht die Frage, unter welchen Bedingungen und von welcher Stelle ab ergibt die Fortsetzung einer Operatorenreihe, z. B. der Reihe $\sigma\sigma\sigma\sigma \dots$, keine neue Mengenklasse. Eines der diesbezüglichen (demnächst in Bull. Acad. Bulgare erscheinenden) Ergebnisse von W. Sierpiński, nämlich daß für die Klasse Φ aller Teilmengen einer abzählbaren Menge bereits $\Phi_{\sigma\sigma\sigma\sigma} = \Phi_{\sigma\sigma\sigma}$ gilt, wird nun von der Verf. aus folgendem allgemeinen Satz hergeleitet: Ist Φ irgendeine Mengenklasse, so gilt $\Phi_{\sigma\Sigma\sigma\Sigma} = \Phi_{\sigma\Sigma\Sigma}$, wo der Operator Σ eine beliebige (also auch unabzählbare) Summierung bezeichnet. Als Hilfssatz hierzu wird folgende Eigenschaft von sog. Atomen im Sinne von M. Fréchet [Fundam. Math. 5, 210—213 (1924)] benutzt: Die Klasse Ψ der Atome von Φ ist die (einzige) Klasse disjunkter Mengen mit den Eigenschaften: 1. Ψ steht zu Φ in der Beziehung $s =$ „jede Menge von Φ ist Summe von Mengen von Ψ “, 2. aus $\theta s \Phi$ folgt $\theta s \Psi$. Zum Schluß wird eine endliche Klasse Φ von endlichen Mengen als ein Beispiel für $\Phi_{\sigma\sigma\sigma\sigma} \neq \Phi_{\sigma\sigma\sigma}$ angegeben. B. Knaster (Warszawa).

Kuratowski, Casimir: Sur les théorèmes de séparation dans la théorie des ensembles. Fundam. Math. 26, 183—191 (1936).

Sei A eine Familie von Teilmengen eines Raumes. Man sagt, A genüge dem 1. Trennungssatz, wenn zu jedem Paar fremder Mengen A_1, A_2 aus A eine Menge B_1

existiert, die ebenso wie ihr Komplement B_2 zu A gehört, so daß $A_1 \subset B_1$ und $A_2 \subset B_2$ gilt; man sagt, A genüge dem 2. Trennungssatz, wenn zu jedem Mengenpaar A_1, A_2 aus A ein Paar fremder Mengen C_1, C_2 existiert, deren Komplemente zu A gehören, so daß $A_1 - A_2 \subset C_1$ und $A_2 - A_1 \subset C_2$ ist. Wie bereits bekannt, genügen folgende Mengenfamilien Γ beiden Trennungssätzen: die Familien der Borelmengen ($G_\delta, F_\sigma, G_{\delta\sigma},$ usw.); die Familie der analytischen Mengen A ; die Familie der projektiven Mengen $CPCA$ (also der Mengen, die aus den analytischen Mengen A durch zweimalige Komplementbildung C und dazwischen ausgeführte Projektion P entstehen). Verf. beweist dies aufs neue, und zwar in verschärfter Form: Eine Familie B genügt dem Reduktionssatz, wenn zu jedem Mengenpaar U_1, U_2 aus B ein Paar fremder Mengen V_1, V_2 in B existiert mit $V_1 \subset U_1, V_2 \subset U_2$ und $V_1 + V_2 = U_1 + U_2$. Genügt B dem Reduktionssatz, so genügt die Familie A der Komplemente aller Mengen aus B beiden Trennungssätzen. Dem Reduktionssatz genügen die komplementären Familien Δ der obengenannten Familien Γ , also die Familien der Mengen $F_\sigma, G_\delta, F_{\sigma\delta},$ usw., der Mengen CA , der Mengen PCA . Verf. zeigt, daß sie sogar folgendem verallgemeinerten Reduktionssatz genügen: Zu jeder Folge von Mengen U^1, U^2, \dots oder Familie B existiert in B eine Folge fremder Mengen V^1, V^2, \dots mit $V^n \subset U^n$ und

$\sum_{n=1}^{\infty} V^n = \sum_{n=1}^{\infty} U^n$. Genügt B nicht nur dem verallgemeinerten Reduktionssatz, sondern

ist B auch noch abzählbar-additiv, d. h. enthält B die Summe jeder Folge von B -Mengen (was z. B. für die Familien Δ der Fall ist), so gelten für die Familie A der Komplemente aller Mengen aus B folgende zwei verallgemeinerten Trennungssätze:

1. Zu jeder Folge von Mengen A_1, A_2, \dots von Mengen aus A mit $\prod_{n=1}^{\infty} A_n = 0$ existiert

eine Folge von Mengen B_1, B_2, \dots , die ebenso wie ihre Komplemente zu A gehören,

mit $A_n \subset B_n$ und $\prod_{n=1}^{\infty} B_n = 0$. 2. Zu jeder Folge von Mengen A_1, A_2, \dots aus A

existiert eine Folge von Mengen C_1, C_2, \dots , deren Komplemente zu A gehören,

mit $A_n - \prod_{m=1}^{\infty} A_m \subset C_n$ und $\prod_{n=1}^{\infty} C_n = 0$. Insbesondere genügen also die Familien Γ den

verallgemeinerten Trennungssätzen.

Nöbeling (Erlangen).

Gillis, J.: Note on a property of measurable sets. J. London Math. Soc. 11, 139—141 (1936).

The author proves in a simple manner: If for an infinite sequence of measurable sets E_1, E_2, \dots , all contained in an interval J of a space of any number of dimensions, there is a positive number $\alpha < mJ$ such that $mE_r \geq \alpha$ ($r = 1, 2, \dots$), then for every $\varepsilon > 0$ and every integer ϱ it is always possible to find indices $i_1 < i_2 < \dots < i_\varrho$ such that the product-set $E_{i_1} \cdot E_{i_2} \cdot \dots \cdot E_{i_\varrho}$ has a measure $> \alpha^\varrho - \varepsilon$. An example shows that in this theorem $\varepsilon > 0$ may not be replaced by $\varepsilon \geq 0$. J. Ridder.

Ridder, J.: Denjoysehe und Perronsche Integration. Math. Z. 41, 184—199 (1936).

It is well known that for a function $F(x)$ to be an indefinite Denjoy integral in an interval $[a, b]$ it is necessary and sufficient that (I) $F(x)$ be continuous in $[a, b]$, and (II), with the exception of an enumerable set, the interval $[a, b]$ may be covered by a sequence of perfect sets on each of which $F(x)$ is absolutely continuous. Various extensions of the Denjoy method of integration consist in replacing the first of these conditions by some others less restrictive. The author treats these extensions from a more general and abstract point of view. He denotes by K the class of finite functions in $[a, b]$ satisfying the condition (II). Then he considers an arbitrary subclass $K(A)$ of K verifying the following conditions: (a) every absolutely continuous function in $[a, b]$ belongs to $K(A)$; (b) if, for two functions $F^{(1)}(x)$ and $F^{(2)}(x)$ belonging to $K(A)$, there is a decomposition of $[a, b]$ into an enumerable set and a sequence of perfect sets P_n such that on each P_n the functions $F^{(1)}(x)$

and $F^{(2)}(x)$ are both absolutely continuous and have the same variation on every measurable subset of P_n ; then the difference $F^{(2)}(x) - F^{(1)}(x)$ is constant in the whole interval $[a, b]$. With each class $K(A)$ subject to these conditions a method of integration is associated. Thus, a function $f(x)$ is said to be integrable (A) if there is a function $F(x)$ in $K(A)$, whose approximative derivative coincides almost everywhere with $f(x)$. The function $F(x)$ may be termed the indefinite integral (A) of $f(x)$. The author establishes fundamental, and immediately obvious, properties of the integral thus defined, and shows how different extensions of the Denjoy integrals (e. g. the Young integral) may be obtained by specifying the subclass $K(A)$ in K . The second part of the paper contains an analogous treatment of the Perron integral by means of a generalization of the Perron major and minor functions. Saks (Warszawa).

Kantorovič, L.: Einige Sätze über halbgeordnete Räume allgemeiner Art. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 2, 7—10 (1936).

Beweisskizzen einiger Sätze betreffend halbstetiger Funktionen in den halbgeordneten Räumen, welche entsprechende Sätze über reelle Funktionen reeller Veränderlichen verallgemeinern. A. Kolmogoroff (Moskau).

Dunford, Nelson: A particular sequence of step functions. Duke math. J. 2, 166 bis 170 (1936).

If a sequence of real functions $f_n(t)$ summable on $(0, 1)$ converges in measure to the function $f(t) \equiv 0$, but does not satisfy the condition that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta} f_n(t) dt = 0$$

for every measurable subset δ , then it may have the following property: for every $g(t) \in L$ except for those in a set of the first category, and corresponding to any measurable function $F(x)$ there exists a subsequence $\{f_{n_i}(t)\}$ such that

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_0^x f_{n_i}(t) g(t) dt = F(x).$$

almost uniformly.

Bochner (Princeton).

Analysis.

Ward, Morgan: A calculus of sequences. Amer. J. Math. 58, 255—266 (1936).

A formal generalization of certain parts of algebraic analysis by systematically replacing the usual binomial coefficient by a "binomial coefficient to the base (u) ", $[n, r] = u_n \cdot u_{n-1} \cdot \dots \cdot u_{n-r+1} / (u_1 u_2 \dots u_r)$, where $(u): u_0, u_1, u_2, \dots$ is a fixed sequence of complex numbers subject to the conditions $u_0 = 0, u_1 = 1, u_n \neq 0$ for $n > 1$ (and sometimes to further restrictions). Following an introductory "formal theory", exponential and trigonometric functions and the finite difference calculus are considered, all to the base (u) . More or less analogous questions have been studied in a long series of papers by F. H. Jackson, who employed the particular base $u_n = (q^n - 1)/(q - 1)$, q a fixed complex number with $|q| \neq 1$. C. R. Adams (Providence).

Achjeser, N.: Verallgemeinerung einer Korkine-Zolotareffschen Minimum-Aufgabe. Commun. Inst. Sci. Math. et Méc., Univ. Kharkoff et Soc. Math. Kharkoff, IV. s. 13, 3—14 (1936).

L'auteur se propose de déterminer entre tous les polynomes

$$f(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_n$$

celui qui rend minima la valeur

$$I(f) = \int_{-1}^{\alpha} |f(x)| dx + \int_{\beta}^1 |f(x)| dx,$$

où $-1 < \alpha < \beta < 1$. Il donne la solution complète du problème, où le polynôme cherché s'exprime au moyen de fonctions et indique le lien qui existe entre ce problème et celui de la meilleure approximation (au sens de Tchebycheff) dans les deux intervalles considérés $(-1, \alpha)$ $(\beta, 1)$.

S. Bernstein (Leningrad).

Bateman, H.: Functional differential equations and inequalities. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 22, 170—172 (1936).

The problem

$$\min_{\int_0^{2\pi} \{f'(x) + m f(x + \pi) + e(x)\}^2 dx,$$

$e(x)$ a given function, m given, $f(x)$ arbitrary periodical with the period 2π and $\int_0^{2\pi} f^2 dx = 1$, leads to a differential equation which can be solved explicitly. In the more general case

$$\min_{\int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{r=1}^n u_r(x) f^{(r)}(x) + \sum_{r=1}^n v_r(x) f^{(r)}(x + \pi) + \sum e(x) \right\}^2 dx}$$

a functional differential equation for $f(x)$ arises.

G. Szegő (St. Louis, Mo.).

Sobolev, S.: Sur quelques évaluations concernant les familles de fonctions ayant des dérivées à carré intégrable. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 1, 279—282 (1936).

Man betrachte die Gesamtheit aller Funktionen $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, die in einem abgeschlossenen Gebiete D stetig sind und in seinem Innern stetige Ableitungen s -ter Ordnung besitzen. Mit $L_s(A)$ wird die Menge derjenigen Funktionen φ bezeichnet, für welche

$$\int_D \dots \int \left(\frac{\partial^s \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right)^2 dx_1 dx_2 \dots dx_n \leq A; \quad \begin{matrix} \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = j \\ j = 1, 2, \dots, s \end{matrix}$$

besteht. Unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen über D kann man folgende Sätze beweisen: Satz I. Die Funktionen der Klasse $L_k(A)$, wo k die kleinste ganze Zahl bedeutet, die größer als $\frac{n}{2}$ ist, d. h. $k = \left[\frac{n}{2} \right] + 1$, sind in ihrer Gesamtheit beschränkt. — Satz II. Die Funktionen aus $L_k(A)$ genügen einer gleichmäßigen Hölderbedingung der Ordnung $\alpha < 1$ für gerade n und der Ordnung $\alpha = \frac{1}{2}$ für ungerade n . — Diese Sätze lassen sich in gewissem Sinne nicht weiter verschärfen. Schauder. (Lwów).

Differentialgleichungen, Potentialtheorie:

Müller, Max: Über den Konvergenzbereich des Verfahrens der schrittweisen Näherungen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen. Math. Z. 41, 163—175 (1936).

Les approximations successives $y_{\nu\kappa}(x)$ pour un système $\frac{dy_\nu}{dx} = f_\nu(x, y_1, \dots, y_n)$ [f_ν continues pour (\mathfrak{E}) — $a_1 \leq x \leq a_2$ et pour $|y_\nu - y_{\nu 0}| \leq \varphi_\nu(|x|)$, $\varphi_\nu(0) = 0$, $\nu = 1, 2, \dots, n$] en partant des valeurs initiales $y_{\nu 0}$ vérifient dans (\mathfrak{E}) les inégalités $|y_{\nu\kappa}(x) - y_{\nu 0}| \leq \varphi_\nu(|x|)$, s'il existe un système de fonctions $F_\nu(\xi, \eta_1, \dots, \eta_n)$ continues pour $0 \leq \xi \leq a'$, $a' \geq \max(a_1, a_2)$, $0 \leq \eta_\nu \leq \varphi_\nu(\xi)$, non décroissantes par rapport à η_1, \dots, η_n , $|f_\nu(x, y_m)| \leq F_\nu(|x|, |y_m - y_{m0}|)$, et telles que $D_\pm \varphi_\nu(\xi) \geq F_\nu(\xi, \varphi(\xi), \dots, \varphi_n(\xi))$. Si les f_ν vérifient des conditions de Lipschitz, les appr. succ. convergent dans (\mathfrak{E}) . Dans ce dernier cas un choix spécial des F_ν fournit les domaines de convergence indiqués par Bendixson, Lindelöf. L'aut. étend aussi la méthode au domaine complexe. En particulier sont donnés les domaines de convergence pour des systèmes du 2nd degré en y_ν . W. Stepanoff (Moskau).

Petrovitch, Michel: Sur une suite de polynômes rattachés aux équations différentielles. Publ. Math. Univ. Belgrade 4, 139—148 (1935).

In der Differentialgleichung $y' = P(x, y) : Q(x, y)$ seien P und Q ganzzahlige Polynome in x und y mit $q = Q(0, 0) \neq 0$. Die Koeffizienten a_n derjenigen Potenzreihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu x^\nu$, durch welche die für $x = 0$ verschwindende Lösung y_0 der Differential-

gleichung geliefert wird, lassen sich darstellen in der Gestalt: $a_n = p_n : (n! q^{2n-1})$, mit $p_n = P_n(0)$. Dabei ist $P_n(x)$ ein Polynom, welches eindeutig bestimmt wird durch

$$P_n = A \frac{\partial P_{n-1}}{\partial x} + B \frac{\partial P_{n-1}}{\partial y} + (2n-3) C P_{n-1}, \quad n = 2, 3, \dots; \quad P_1(x) = P(x),$$

mit $A = Q^2$, $B = PQ$, $C = -\left(Q \frac{\partial Q}{\partial x} + P \frac{\partial Q}{\partial y}\right)$. — Ist y_0 algebraische Funktion, so gilt $p_n = k_n \gamma^n$, wo k_n und γ ganze Zahlen sind (γ unabhängig von n). Ganz Entsprechendes gilt auch für $y^{(h)} = P(x, y, y', \dots, y^{(h-1)}) : Q(x, y, y', \dots, y^{(h-1)})$, wo P und Q wieder ganzzahlige Polynome in $x, y, y', \dots, y^{(h-1)}$ sind. *Haupt* (Erlangen).

● **Poole, E. G. C.:** *Introduction to the theory of linear differential equations.* Oxford: Clarendon press 1936. VIII, 202 pag. 17/6.

A very clear treatment of the principal ideas contained in the analytic theory of linear differential equations — with a great number of miscellaneous examples. Contents: Existence theorems. Heaviside's solution. Linear operators. Equations with uniform coefficients. The hypergeometric equation. Laplace's transformation. Schwarz's problem. Lamé's and Mathieu's equations. — The referent's opinion is that an elementary treatment of some Lappo-Danilevski's ideas (this Zbl. 9, 350) should be also added to such a book for to give new ways to the students' own work. *Janczewski*.

Plemelj, Josef: *Zur Theorie der linearen Differentialgleichung der zweiten Ordnung mit vier Fuchsschen singulären Punkten.* Mh. Math. Phys. 43, 321—339 (1936).

Für eine lineare Differentialgleichung II. Ordnung vom Fuchsschen Typus mit den 4 singulären Stellen $e_1, e_2, e_3, e_4 = \infty$ wird die Frage beantwortet, wann es möglich ist, den in der Differentialgleichung auftretenden akzessorischen Parameter so zu bestimmen, daß der Quotient $\tau(x) = \frac{y_1(x)}{y_2(x)}$ zweier linear unabhängiger Lösungen auf jedem geschlossenen Weg, der keinen der Verzweigungsschnitte trifft, analytisch fortgesetzt, in sich selbst zurückkehrt. *v. Koppentels* (Hannover).

Blank, J.: *Über eine geometrische Deutung der Integrabilitätsbedingung der Pfaffschen Differentialgleichung.* Commun. Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff et Soc. Math. Kharkoff, IV. s. 13, 75—81 (1936).

Die Begriffe der projektiven Flächentheorie, wie diese z. B. in einem Werke von G. Fubini und E. Čech entwickelt wurde (vgl. dies. Zbl. 2, 351), lassen sich auf das Integralkurvensystem einer Pfaffschen Differentialgleichung $(1) P dx + Q dy + R dz = 0$ weitgehend übertragen. Der Verf. geht von der homogenen Form $S \xi dx = 0$, wobei $S \xi x = 0$, der Gleichung (1) aus und betrachtet das Doppelverhältnis der vier Punkte, in denen die Haupttangentialrichtungen zweier auf einer Integralkurve benachbarten Punkte P, P' die Schnittlinie der Ebenen ξ, ξ' , die den Punkten P, P' durch die Differentialgleichung zugeordnet sind, durchsetzen. Es zeigt sich, daß das Doppelverhältnis gegen einen endlichen von der Integralkurve unabhängigen Wert konvergiert, falls die Integrabilitätsbedingung nicht erfüllt ist. Ist dieselbe erfüllt, so ist das Doppelverhältnis bezüglich dx im zweiten Grade unendlich klein. *O. Borůvka* (Brno).

Sintsov, D. M.: *Sur une propriété des lignes géodésiques du système des courbes intégrales de l'équation de Pfaff.* Commun. Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff et Soc. Math. Kharkoff, IV. s. 13, 63—64 (1936).

Der Verf. betrachtet das System von Integralkurven einer Pfaffschen Gleichung $P dx + Q dy + R dz = 0$ und beweist diesbezüglich den folgenden Satz: Eine geodätische Kurve erster Art des Systems ist eine ebene Kurve dann und nur dann, wenn sie zugleich eine Krümmungslinie zweiter Art ist. *O. Borůvka* (Brno).

Kourensky, M.: *Sur la généralisation de la méthode de Charpit-Lagrange pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre.* Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 22, 175—184 (1936).

The paper discusses a generalization of Charpit's method [Goursat, Equations du premier ordre, p. 142 (1921)] to systems involving more than one unknown. The

developments given explicitly concern a system of two equations of the form $f(x, y, z, z', p, q, p', q') = 0$, where the unknowns are z, z' and the notation is mongean. Two undetermined equations of the same form are adjoined and the integrability conditions of the resulting system (solved for p, q, p', q') are given. When q' is absent from the original system, it is only necessary to adjoin a single equation, which likewise does not contain q' . This special case is discussed in greater detail. The author remarks that the results are valid for any number of unknowns. *J. M. Thomas.*

Martin, Léopold: Sur les problèmes aux limites relatifs à certains systèmes d'équations aux dérivées partielles. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 22, 533—539 (1936).

Der Verf. betrachtet das folgende System von partiellen Differentialgleichungen

$$F_j(z) \equiv \partial^2 z^j / \partial x \partial y + \sum_k (a_{jk} \partial z^k / \partial x + b_{jk} \partial z^k / \partial y + c_{jk} z^b) = f_j(x, y)$$

($j, k = 1, \dots, n$) und löst das Problem von Darboux-Picard (Bestimmung der durch Randwerte bestimmten Lösung in einem auf Charakteristiken gelegenen Rechtecke) und das von Cauchy (Bestimmung der Lösung, wenn ihre und der ersten Ableitungen Werte auf einem regulären Kurvenbogen gegeben sind). Dabei wendet er die auf Systeme verallgemeinerte Riemannsche Methode an. *O. Borůvka* (Brno).

Soboleff, S.: Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales. Rec. math. Moscou, N. s. 1, 39—71 (1936).

La méthode en question a été utilisée par l'auteur (dans les cas spéciaux) depuis l'année 1930; voir les travaux de Soboleff (et de Gogoladze), ce Zbl. 8, 208, 357; 10, 113; 11, 353. Une note concernant la méthode générale était publiée récemment: ce Zbl. 12, 406. L'auteur étudie l'équation

$$Lu \equiv \sum_{i=1}^{2k+1} \sum_{j=1}^{2k+1} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{2k+1} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F \quad (1)$$

(A_{ij}, B_i, F, C —fonctions des $x_1 \dots x_{2k+1} t$) du type normal ($\sum \sum A_{ij} p_i p_j > 0$) avec les conditions initiales

$$u \Big|_{t=0} = u^{(0)}(x_1 \dots x_{2k+1}); \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = u^{(1)}(x_1 \dots x_{2k+1}). \quad (2)$$

Chap. I. Généralisation d'une formule de Kirchhoff. Il est connu que sur la surface du cône caractéristique S passant par un point donné M_0 les valeurs de $\frac{\partial^k u}{\partial t^k}$ sont liées avec les valeurs des dérivées précédentes par une relation différentielle. En partant de ces faits l'auteur établit une identité fondamentale liant la fonction u avec $u^{(0)}, u^{(1)}$ et $Lu = \rho$. Quelques calculs des approximations successives permettent ensuite exprimer la valeur de u à l'aide des fonctions $u^{(0)}, u^{(1)}, \rho$. Ces résultats peuvent être rapprochés à ceux de Mathisson, ce Zbl. 6, 307; 9, 357. — Chap. II, III. L'auteur généralise les notions des opérations différentielles sur un espace des fonctionnelles spéciales. L'algorithme du chap. I est maintenant une opération linéaire dans un certain espace des fonctions et nous donne l'opération inverse gauche $GLu = u$ pour l'opération donnée L . On dérive d'ici immédiatement l'opération inverse droite pour l'opération conjuguée L^* dans l'espace des fonctionnelles en question: $L^*G^*\rho = \rho$. En construisant ensuite $G^{**}(G')$ —l'opération inverse gauche (droite) à $L^*(L)$ dans l'espace des fonctions (fonctionnelle) l'auteur démontre l'égalité $G' \equiv G$ ($G^{**} \equiv G$) sur un ensemble partout dense dans l'espace considéré. L'existence de l'opération unique G inverse à L — c'est à dire les théorèmes d'existence et d'unicité pour le problème généralisé de Cauchy sont ainsi obtenus. Une condition suffisante pour l'existence d'une solution classique suit. *Janczewski* (Leningrad).

Ballantine, Stuart: An operational proof of the wave-potential theorem, with applications to electromagnetic and acoustic systems. J. Franklin Inst. 221, 469—484 (1936).

The first part of this paper derives the classical integral solution of the wave

equation $\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(x, y, z, t)$, under assigned boundary conditions, by first considering the "potential" problem $\nabla^2 u + \frac{p^2}{c^2} u = F(x, y, z, t)$ and then "interpreting" $e^{-\frac{pr}{c}} f(t)$ as equivalent to $f\left(t - \frac{r}{c}\right)$ so as to obtain the wellknown solution involving retarded potentials. Applications of the classical formula to Maxwell's equations and to acoustics are given and attention is called to certain unjustified simplifications of the general formula current in acoustical literature. *Murnaghan.*

Uller, Karl: Die Entwicklung des Wellen-Begriffes. IX. Gerlands Beitr. Geophys. 47, 299—320 (1936).

Der Verf. sucht die allgemeinsten Grundgesetze für die Form und Ausbreitung der Welle schlechthin aufzustellen. 1. Der allgemeinste Ausdruck für die skalare und die vektorielle Welle. Die Feldgleichungen sind hier nicht mehr, wie bisher, als linear vorausgesetzt. 2. Der allgemeinste Ausdruck des Interferenzprinzips. Seine Auswirkung an irgendwelchen Feldgleichungen. 3. Die Phasengleichung linearer Wellen. Besprechung einiger Beispiele mit einfacher Quellungsform, für ruhende, homogene Mittel. Einfluß einiger charakteristischer komplexer Quellungsformen auf die Wellenausbreitung. 4. Phasen- und Stärkengleichung nichtlinearer Wellen, am Beispiel der Feldgleichung der Wärmeleitung. U. a. wird abgeleitet, daß „stehende nichtlineare Wellen“ unmöglich sind (vgl. dies. Zbl. 10, 261). *S. Gradstein (Eindhoven).*

Nomitsu, Takaharu: Extension of Duhamel's theorem. Proc. Imp. Acad. Jap. 11, 359—361 (1936).

Duhamels Theorem, welches die Lösung der Wärmeleitungsgleichung gibt für einen Körper, der einer veränderlichen Oberflächentemperatur ausgesetzt ist, wenn die Lösung für konstante Oberflächentemperatur bekannt ist, wird verallgemeinert. x_1, x_2, \dots, x_n seien die unabhängigen Veränderlichen, $W(x_1, x_2, \dots, x_n)$ eine Funktion dieser Veränderlichen, die von einer anderen Größe $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ beeinflusst wird, W_1, W_2, \dots, W_n seien die Werte von W , die verschiedenen F -Werten F_1, F_2, \dots, F_n entsprechen. Wenn dann in gleicher Weise zu $F = F_1 + F_2 + \dots + F_n$ ein Wert $W = W_1 + W_2 + \dots + W_n$ gehört, wird W „additiv“ in seiner Beziehung zu F genannt. Nun soll $W(x_1, x_2, \dots, x_n)$ holomorph hinsichtlich x_1 und additiv mit Bezug auf $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sein und $W = 0$ und $F = 0$ für $x_1 < 0$. Ist die Lösung W für $x_1 > 0$, die einem Einfluß $F(\xi_1, x_2, \dots, x_n)$ entspricht, der konstant hinsichtlich x_1 (Parameter ξ_1) ist, $W(\xi_1, x_2, \dots, x_n)$, dann ist die Lösung, welche zu einem mit x_1 veränderlichen Einfluß $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ gehört,

$$W = \int_0^{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} W(\xi_1, x_1 - \xi_1, x_2, \dots, x_n) d\xi_1.$$

Einige Beispiele werden kurz erwähnt.

Haurwitz (Toronto).

Pleijel, Åke: Eine hydrodynamische Randwertaufgabe. Ark. Mat. Astron. Fys. 25 A, Nr 17, 1—9 (1936).

The problem treated in this paper is that of extending results due to C. W. Oseen (see Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik, Leipzig 1927) for the hydrodynamical differential system

$$\begin{aligned} \mu \Delta u_j - \frac{\partial u_j}{\partial t} &= \frac{\partial p}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, 3, \\ \frac{\partial u_j}{\partial x_j} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0, \end{aligned}$$

subject to the following boundary conditions, called the conditions of the outer problem:

$$\begin{aligned} t = 0, \quad r &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}} > a: u_j = 0; \\ t > 0, \quad r &= a: u_j = \bar{u}_j; \\ r &\rightarrow \infty: u_j \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Employing the transformation,

$$u_j = F_j - \frac{\partial G}{\partial x_j}, \quad G = \int_0^t p \, dt,$$

the author considers the system

$$\mu \Delta F_j - \frac{\partial F_j}{\partial t} = 0, \quad j = 1, 2, 3; \quad \frac{\partial F_j}{\partial x_j} = 0;$$

where the functions are subject to the following conditions, called the conditions of the inner problem:

$$\begin{aligned} t = 0, \quad r < a: F_j &= \frac{\partial G}{\partial x_j}, \\ t > 0, \quad r = a: F_j &= \bar{u}_j + \frac{\partial G}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

The solution is found in terms of developments employing tesseral and sectorial surface harmonics.

H. T. Davis (Bloomington, Indiana).

Koebe, P.: Hydrodynamische Potentialströmungen in mehrfach zusammenhängenden ebenen Bereichen im Zusammenhang mit der konformen Abbildung solcher Bereiche. (N-Decker-Strömung, N-Schaufel-Strömung, N-Gitter-Strömung.) Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig 87, 287—318 (1935).

Es werden Existenz- und Unitätssätze aufgestellt für Potentialströmungen in mehrfach zusammenhängenden Bereichen, deren Begrenzung aus N geschlossenen stückweise analytischen Linien besteht. Es wird gezeigt, daß durch die Vorgabe der Geschwindigkeit im Unendlichen und der N -Randzirkulationen die sogenannte N -Decker-Strömung vollständig charakterisiert ist und aus einfacheren Grundströmungen aufgebaut werden kann. Die Strömung kann ebenfalls charakterisiert werden durch Vorgabe der Geschwindigkeit im Unendlichen und von einem Staupunkt auf jeder Randlinie (Ablösungssatz). Eine N -Schaufel-Strömung entsteht durch Vorgabe im Unendlichen und im innerhalb der Strömung liegenden Nullpunkt einer Wirbelquelle bzw. Wirbelsenke sowie der Randzirkulationen. Wiederholt sich die Anordnung der gegebenen N -Linien periodisch in der y -Richtung, so spricht Verf. von einem N -Gitter. Die zugehörige Strömung entsteht durch Vorgabe der Geschwindigkeit für $x = \pm \infty$ sowie der Randzirkulationen. Diese Strömung wird behandelt unter Zurückführung auf die Schaufelströmung.

Weinstein (Genf).

Knight, R. C.: The potential of a sphere inside an infinite circular cylinder. Quart. J. Math., Oxford Ser. 7, 124—133 (1936).

Im Innern eines Zylinders befinde sich eine Kugel, deren Mittelpunkt mit der Achse des Zylinders zusammenfällt. Gesucht ist jene Lösung der Laplaceschen Gleichung, die auf der Kugel vorgegebene Werte annimmt und längs der Zylinderoberfläche verschwindet. Von den vorgegebenen Werten auf der Kugel wird Symmetrie in bezug auf die Achse des Zylinders und Entwickelbarkeit nach Legendreschen Polynomen vorausgesetzt. Für den Fall, daß die vorgegebenen Werte auf der Kugel gleich einer Konstanten sind, wird die Lösung für verschiedene Werte des Verhältnisses des Kugelradius zum Zylinderradius numerisch angegeben. Die Methode zur Gewinnung der Lösung ist die folgende: Zunächst wird jene Lösung gesucht, die sich im Nullpunkt verhält wie das Potential eines Massenpunktes und am Zylinder verschwindet. Durch wiederholte Differentiation werden aus dieser Lösung neue Partikularlösungen gefunden. Die gewünschte Lösung wird dann in Form einer passenden linearen Kombination dieser Partikularlösungen angesetzt. Die Berechnung der zugehörigen Koeffizienten erfolgt durch eine Methode fortschreitender Annäherung, deren Konvergenz untersucht wird.

Funk (Prag).

Barkas, W. H.: Conjugate potential functions and the problem of the finite grid. Physic. Rev., II. s. 49, 627—630 (1936).

Ausgehend vom zweidimensionalen Potential einer unendlich langen geladenen Linie: $W = -2q \log(Z - a)$, wo Z komplex ist, leitet Verf. durch elementare Summierung Potential- und Feldausdrücke ab für Zusammenstellungen endlich und unendlich vieler solcher Linienladungen.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Spezielle Funktionen:

Knoll, F.: Die zyklischen Funktionen und die damit zusammenhängenden linearen Operationen. Verallgemeinerte Bernoullische Polynome. Deutsche Math. 1, 156—162 (1936).

Verf. betrachtet „hyperbolische zyklische Funktionen der Ordnung n “, definiert durch: $\omega_k(z) = 1/n \cdot \sum_{\alpha=1 \dots n} \varepsilon_{\alpha k} \cdot \exp(\varepsilon_{\alpha} z)$, wo $k=1, 2, \dots, n$ und $\varepsilon_{\alpha k} = \exp(2\pi i \alpha k/n)$. Mit Hilfe des Residuensatzes können diese Funktionen als Randintegral dargestellt werden. Diese Integraldarstellung gestattet einfache Beweise einer Reihe von Beziehungen für die Funktionen ω , wie z. B. Differentiationsformel, Darstellung der Exponentialfunktion durch eine endliche Reihe der ω_k , Additionstheorem. Mit einer abgeleiteten transzendenten Differentiationsformel: $\omega_s(\tau D) \omega_r(z) = \omega_s(\tau) \omega_{n-s+r}(z)$, wo $D \equiv d/dz$, und besonders eingeführten neuen Funktionen A gelangt Verf. nach längerer Rechnung zu einer Reihendarstellung von $\omega_s(z)/(n-r)!$ durch Funktionen A , welche Reihen in bezug auf Konvergenz bzw. Divergenz noch einer näheren Untersuchung bedürfen. Endlich leitet Verf. eine Formel ab, welche der Euler-Maclaurinschen Summenformel entspricht. *M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

● **Goursat, Édouard:** Leçons sur les séries hypergéométriques et sur quelques fonctions qui s'y rattachent. I. Propriétés générales de l'équation d'Euler et de Gauss. (Actualités scient. et industr. Nr. 333.) Paris: Hermann & Cie. 1936. 93 pag. Frs. 20.—.

This is the first of a series of monographs on the hypergeometric series and on some associated functions. In this particular volume the author first considers the hypergeometric equation and Kummer's twenty-four solutions, and follows this by the definition of Riemann's P -function. The second chapter is devoted to the problem of obtaining solutions of the equation in terms of definite integrals. For certain values of the parameters the solutions of the equation, so far obtained, are not distinct, or one solution becomes nugatory. Such cases are considered in detail in chapter III, where also there are given properties of Jacobi polynomials. The next chapter is concerned with the group of the hypergeometric equation and equations of the same family, while in the final chapter Cauchy's theorem is used to obtain linear relations between integral solutions of the equation.

W. N. Bailey (Manchester).

● **Tölke, F.:** Besselsche und Hankelsche Zylinderfunktionen nullter bis dritter Ordnung vom Argument $r\sqrt{i}$. Stuttgart: Konrad Wittwer 1936. 92 S. u. 3 Abb. geb. RM. 4.90.

Zu Anfang der Funktionentafel gibt Verf. die bekannte Differentialgleichung für die Besselschen und Hankelschen Funktionen mit obengenanntem Argument an und sagt, daß erfahrungsgemäß in erster Linie die Besselschen Funktionen erster Art und jene dritter Art (Hankelsche Funktionen erster Art) praktisch wichtig sind. Die Besselschen Funktionen zweiter Art lassen sich aus den genannten Funktionen in einfacher Weise berechnen. Verf. trennt die zu berechnenden Funktionen in Real- und Imaginärteil und gibt Formeln, wie durch Differentiation bzw. durch Rekursion die Funktionen verschiedener Ordnung aus schon berechneten Funktionen niedriger Ordnung zu erhalten sind. Für kleine Argumente benutzt er die bekannten Potenzreihen, für große Argumente die asymptotischen Reihen, welche angegeben werden. Zu Ende der Einleitung werden noch einige Anwendungsgebiete behandelt, und zwar die quasi stationäre Temperaturverteilung in wärmeleitenden Zylindern und die Stromverteilung beim Skineffekt in einem kreiszylindrischen Leiter. Endlich die Theorie der Kreisplatte auf elastischer Unterlage und die Differentialgleichung der Kreiszyinderschale mit linear veränderlicher Wandstärke. Die Tafeln enthalten die Funktionen der Ordnungen 1, 2 und 3 mit Argumenten von 0—21 ansteigend mit 0,01, und zwar auf 4 Stellen berechnet. Zum Schluß des Buches folgt ein kurzer Anhang über die numerische Berechnung von Funktionswerten außerhalb des Tafelbereichs mit Formeln und Rechenbeispielen. *Strutt*.

Maier, Wilhelm: Aus dem Gebiet der Differenzengleichungen. Mh. Math. Phys. 44, 13—26 (1936).

Verf. leitet für die Γ -Funktion folgende, von ihm als Additionssatz bezeichnete, zweiparametrische Identität her: Unter den Voraussetzungen $\left| \frac{a}{b} \right| = 1$, $\left| \arg \frac{a}{b} \right| < \pi$, $0 < \Re(\lambda)$ ist

$$\sum_{|\nu| < \infty}^{\equiv x(1)} \frac{a^{\nu} b^{\lambda - \nu}}{\Gamma(1 + \nu) \Gamma(1 + \lambda - \nu)} = \frac{(a + b)^{\lambda}}{\Gamma(1 + \lambda)}.$$

Die Γ -Funktion erweist sich als die einzige analytische Funktion, die dieser Identität und den Bedingungen $\Gamma(2) = 1$, $\Gamma(\nu) < \infty$ für $\Re(\nu) = 1$ genügt. Durch Verallgemeinerung ergibt sich die zweiparametrische Lösungsmannigfaltigkeit der hypergeometrischen Differentialgleichung. Dadurch wird die Monodromiegruppe der hypergeometrischen Funktion in neuer Weise zugänglich. Weiter wird mit Hilfe der Möbiusschen μ -Funktion eine Produktbildung aus Γ -Faktoren angegeben, so daß eine elementare Funktion entsteht:

$(1+z) \prod_{l=1}^{\infty} \left(\Gamma\left(1 + \frac{z}{l}\right) \right)^{\mu_l} = e^z$. Diese Betrachtung wird auf die Weierstraßsche \wp -Funktion erweitert. Es ist:

$$\sum_{m,n} \frac{\mu_{m,n}}{(m+in)^2} \left[-\frac{(m+in)^2}{z^2} - \wp\left(\frac{z}{m+in}\right) \right] = 4 \frac{d}{dz} \left(\frac{z^3}{1-z^4} \right),$$

wobei die ganzen rationalen Zahlen $\mu_{m,n}$ durch

$$\sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (h+ik)^{-s} \sum_{m,n}^{0 < m^2+n^2} \mu_{m,n} (m+in)^{-s} = 1 \text{ für } \Re(s) > 2$$

bestimmt sind.

Bruno Schoeneberg (Hamburg).

Steen, S. W. P.: A linear transformation connected with the Riemann zeta function.

Proc. London Math. Soc., II. s, 41, 151—175 (1936).

The subject of this paper is the linear transformation

$$N(f) = \text{l. i. m.}_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{v=1}^n f\{vx/(2\pi)\} - \int_0^n f\{ux/(2\pi)\} du \right).$$

A necessary and sufficient condition for the transformation to be closed, i. e. such that whenever l. i. m. $f_n = f$ and l. i. m. $N(f_n) = g$, then $N(f) = g$, is that

$$\left| \sum_{v=1}^n \frac{1}{v^{\frac{1}{2}-i\lambda}} - \int_0^n \frac{du}{u^{\frac{1}{2}-i\lambda}} \right| \leq k \left\{ 1 + \left| \zeta\left(\frac{1}{2} - i\lambda\right) \right| \right\}$$

for all values of n and λ . It is not known whether this is satisfied or not. — Various properties of the transformation are investigated, using orthogonal differentials. Finally the transformation is used to obtain various necessary and sufficient conditions for the truth of the Lindelöf and Riemann hypotheses in the theory of the Riemann zeta-function.

E. C. Titchmarsh (Oxford).

Integralgleichungen, Funktionalanalysis und Verwandtes:

Popovici, C.: Nouvelles solutions de l'équation de Fredholm dans un intervalle fermé.

(2. congr. des math. roum., Turnu-Severin, 5.—9. V. 1932.) Mathematica, Cluj 9, 194 bis 208 u. 328—331 (1935).

In the main, this is a criticism of an article by Badesco (see this Zbl. 4, 398) which

sets up a correspondence between the integral equation $\varphi(z) - \frac{\lambda}{2\pi i} \int_C \frac{K(z,s)\varphi(s)}{s-\theta(z)} ds = \psi(z)$

and the functional equation $\varphi(z) - \lambda K(z, \theta(z)) \varphi(\theta(z)) = \psi(z)$ and applies the Fredholm theorems. The present article asserts the nonequivalence of the two equations, and the nonvalidity, in general, of the Fredholm theorems, under the conditions of Badesco, that the curve C contain a single attractive point ξ : $\theta(\xi) = \xi$, $|\theta'(\xi)| < 1$.

Some examples: (a) $\varphi(z) - \frac{\lambda}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(s) ds}{s-\alpha z} = 1$, $\alpha < 1$, $\lambda < 1$, is not equivalent to

$\varphi(z) - \lambda \varphi(\alpha z) = 1$, because the equation $\varphi(z) - \lambda \varphi(\alpha z) = 0$ has solutions of the form

$\varphi(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda^n g(\alpha^n z)$ for all λ and suitably defined g ; (b) $\varphi(z) - \frac{\lambda}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(s) ds}{s-\alpha z} = \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^n$

+ $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{h_p}{z-\alpha_p} = \psi(z)$ with $\alpha_p \rightarrow 0$, $\alpha < 1$, $\lambda < 1$ is not equivalent to $\varphi(z) - \lambda \varphi(\alpha z) = \psi(z)$

because the solution $\varphi(z)$ has an essentially singular point at the origin; and so on. They indicate that it is a question of the class of functions permissible in $\psi(z)$, $K(z, s)$ and $\varphi(s)$. Badesco on p. 331 admits negligence in stating accurate conditions and points out that in the case in which $\varphi(z)$, $K(z, s)$, $\psi(z)$ are holomorphic in a region containing the attractive point ξ of θ , his results are valid. *Hildebrandt* (Ann Arbor).

Akbergenoff, J. A.: Über die Annäherungslösung der Fredholmschen Integralgleichung zweiter Art und die Bestimmung seines Eigenwertes. *Rec. math. Moscou* 42, 679—697 u. deutsch. Zusammenfassung 698 (1935) [Russisch].

Der Verf. beschäftigt sich mit den Annäherungslösungen der Fredholmschen Integralgleichung, wobei er den Kern durch einen anderen für effektive Ausrechnung geeigneteren ersetzt. — Zunächst wird der folgende Satz bewiesen: Sind die Gleichungen $\mathbf{J} \equiv \varphi - f - \lambda \int_a^b K \varphi dy = 0$, $\tilde{\mathbf{J}} \equiv \tilde{\varphi} - f - \lambda \int_a^b \tilde{K} \tilde{\varphi} dy = 0$ gegeben, und ist $\int_a^b \int_a^b [K(x, y) - \tilde{K}(x, y)]^2 dx dy < h^2$, $\int_a^b \int_a^b |\tilde{I}(x, y, \lambda)|^2 dx dy < A^2$, $\int_a^b f^2 dx < N^2$, $1 - mh > 0$, wobei h und N Konstanten sind, A hängt von λ ab, und \tilde{I} die Resolvente von $\tilde{\mathbf{J}}$ bedeutet, so ist $\int_a^b [\varphi - \tilde{\varphi}]^2 dx < \frac{(1 + |\lambda| \cdot A)^4 \cdot |\lambda|^2 \cdot h^2 N^2}{[1 - (1 + |\lambda| \cdot A) \cdot |\lambda| \cdot h]}$. — Ist die Folge der Kerne \tilde{K}_ν

gleichmäßig beschränkt und konvergieren die \tilde{K}_ν im Mittel zu K , so werden, wie der Verf. zeigt, auch die Lösungen $\tilde{\varphi}_\nu$ im Mittel zu φ konvergieren. — Weiter wird eine Abschätzung für die Differenz der Lösungen von \mathbf{J} und $\tilde{\mathbf{J}}$ gegeben: Ist $|\tilde{I}(x, y; \lambda)| < C$, $1 - \varepsilon |\lambda| (b - a) l > 0$, worin $l = 1 + |\lambda| (b - a) C$ bedeutet, so hat \mathbf{J} eine einzige Lösung φ , für die $|\varphi - \tilde{\varphi}| \leq \frac{|\lambda| \cdot (b - a) l^2 \varepsilon}{1 - \varepsilon (b - a) \cdot |\lambda| \cdot l}$ gilt. — Dann gibt der Verf. ein Kriterium für die Existenz von Eigenwerten in vorgegebenen Kreisen an: Ist auf dem Kreise vom Radius R mit dem Mittelpunkt in a : $|\tilde{I}(x, y, \lambda)| < C$, $1 - |\lambda| \cdot \varepsilon (b - a) l < 0$, $\frac{R^2 (b - a) R \varepsilon}{1 - |\lambda| \cdot \varepsilon (b - a) l} < 1$, wobei $l \equiv 1 + |\lambda| \cdot (b - a) C$ bedeutet, so haben die Gleichungen $D(\lambda) = 0$ und $\tilde{D}(\lambda) = 0$ im angegebenen Kreise die gleiche Anzahl von Wurzeln. — Schließlich macht der Verf. einige Bemerkungen, die sich auf die Anwendung seiner Sätze bei effektiver Lösung einer Integralgleichung beziehen, und gibt ein numerisches Beispiel.

Stefan Bergmann (Tomsk).

Krein, M.: Sur quelques propriétés des noyaux de Kellog. *Commun. Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff et Soc. Math. Kharkoff*, IV. s. 13, 15—27 (1936).

Suite des travaux précédents de l'auteur (ce Zbl. 12, 168, 407; 13, 49). Un exposé détaillé des résultats de la note Zbl. 12, 169 et quelques théorèmes de plus dans le même ordre d'idées.

Janczewski (Leningrad).

Hostinský, B.: Sur les produits de composition de deux ou de plusieurs fonctions. (2. congr. des math. roum., Turnu-Severin, 5.—9. V. 1932.) *Mathematica, Cluj* 9, 215 bis 217 (1935).

Quelques indications relatives à la solution de l'équation

$$\Phi(x, y, u + v) = \int_a^b \Phi(x, z, u) \Phi(z, y, v) dz.$$

A. Kolmogoroff (Moskau).

Danilevskij, A.: Sur un théorème de M. G. Krein. *C. R. Acad. Sci. URSS*, N. s. 1, 347—350 (1936).

M. Krein (this Zbl. 11, 73) has proved that the bilinear series for a symmetric, continuous positive kernel $K(x, \xi)$ can be differentiated termwise with respect to x and ξ as often as we please provided the corresponding partial derivatives of $K(x, \xi)$ exist and are continuous. The author gives a new simple proof of this theorem and indicates some generalizations.

E. Hille (New Haven, Conn.).

Efross, A. M.: The application of the operational calculus to the analysis. *Rec. math. Moscou* 42, 699—705 u. engl. Zusammenfassung 706 (1935) [Russisch].

The main result of the paper is the theorem: Given a solution $\varphi(\tau)$ of the integral equation

$$\int_0^{\infty} e^{-p\tau} \varphi(\tau) d\tau = \Phi(p),$$

then the solution of the integral equation

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = \Phi[q(p)] \cdot U(p)$$

is given by

$$f(t) = \int_0^{\infty} \varphi(\tau) \psi(\tau, t) d\tau,$$

where $\psi(\tau, t)$ is the solution of

$$\int_0^{\infty} e^{-p\tau} \psi(\tau, t) d\tau = e^{-\tau q(p)} U(p).$$

The paper contains some illustrations of the application of this theorem. *Sokolnikoff.*

Sanielevici, S.: Sur une application des polynomes de Legendre. (2. congr. des math. rum., Turnu-Severin, 5.—9. V. 1932.) *Mathematica, Cluj* 9, 155—158 (1935).

Starting from the classical fact that Legendre polynomials are the characteristic functions of the kernel

$$K(x, s) = \begin{cases} \log 2 - 1/2 - 1/2 \log\{(1-s)(1+x)\} & \text{for } -1 \leq s \leq x \leq 1, \\ \log 2 - 1/2 - 1/2 \log\{(1-x)(1+s)\} & \text{for } -1 \leq x \leq s \leq 1, \end{cases}$$

the author investigates the kernels $K(\alpha x, s)$ and $K(x, \alpha s)$, $0 < \alpha < 1$. The corresponding homogeneous equations lead in both cases to a functional differential equation for which the solution is obtained by means of developments in power respectively Legendre series. *G. Szegő (St. Louis, Mo.).*

Toda, Kiyoshi: On systems of simultaneous functional equations. *J. Sci. Hiroshima Univ. A* 6, 69—86 (1936).

The present paper seeks to find a system of functions which are linearly transformed, when their variables are linearly transformed. Thus the author considers the problem of solving the functional equations

$$\omega^{x\lambda}(X) = \sum_{\mu, \nu} K_{\mu\nu}^{x\lambda}(a) \omega^{\mu\nu}(x), \quad (x, \lambda = 1, 2, \dots, n)$$

where he writes

$$X^i = \sum_r a_r^i x^r, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

and $\omega^{x\lambda}(x)$, $K_{\mu\nu}^{x\lambda}(a)$ are functions of the x 's and the a 's respectively. He shows that with regard to any variable x^i , the $\omega^{x\lambda}(x)$ must be polynomials and the number of terms cannot exceed n^2 . The problem is divided into the three special cases: $n = 2$, $n = 3$, and $n \geq 4$. — The second part of the paper extends the results to systems of equations in two variables:

$$\omega^{x\lambda}(X; Y) = \sum_{\mu, \nu} K_{\mu\nu}^{x\lambda}(a) \omega^{\mu\nu}(x; y),$$

$$X^i = \sum_{r=1}^n a_r^i x^r, \quad Y^i = \sum_{r=1}^n a_r^i y^r.$$

H. T. Davis.

Giorgi, G.: Metodi moderni di calcolo operatorio funzionale. *Rend. Semin. mat. s. Milano* 8, 189—214 (1934).

This paper gives a summary historical account of that branch of analysis which is widely known as Heaviside's operational theory. The contributions of the author are discussed in some detail. *Murnaghan (Baltimore).*

Michlin, S.: Composition des intégrales singulières doubles. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 2, 3—6 (1936).

Dans un plan, soient θ et r les coordonnées polaires d'un point Q par rapport à un point P ; étant données une fonction périodique $f(\theta)$, dont la valeur moyenne est nulle et qui remplit une condition de Lipschitz avec un exposant quelconque, et une constante a , on peut appliquer à toute fonction $u(P)$, soumise à une condition de Lipschitz et dont le produit par OP^h est borné ($h > 0$), l'opération

$$Fu(P) = au(P) + \iint f(\theta) r^{-2} u(Q) dS_Q,$$

où l'intégrale étendue au plan est prise en valeur principale, c'est-à-dire qu'on exclut du champ le cercle infiniment petit $r < \eta$. Rectifiant une formule préliminaire due à F. Tricomi, l'aut. remarque que, si F_1 et F_2 sont deux opérations du type précédent, on a toujours $F_1 F_2 u = F_2 F_1 u$. Il en profite pour construire un calcul symbolique: développant $f(\theta)$ suivant les puissances positives et négatives de $e^{i\theta}$, il en déduit le développement de F en série de puissances symboliques, positives, nulles et négatives, d'une opération h pour laquelle on a $a = 0$ et $f = e^{i\theta}/(2\pi)$; h^0 est la transformation identique; ce développement se comporte à l'égard de la multiplication symbolique comme une série de Laurent. Dès lors, pour exprimer que le produit de deux transformations F_1 et F_2 est la transformation identique, on écrit que le produit des développements symboliques est 1, et cela fournit un moyen de trouver F_2 quand on donne F_1 . Il faut toutefois signaler une erreur de l'aut.: il écrit bien que, pour h^n ($n > 0$), on a $a = 0$ et $f = n e^{ni\theta}/(2\pi)$, mais pour h^{-n} ($n > 0$) il devrait prendre $a = 0$ et $f = (-1)^n n e^{-ni\theta}/(2\pi)$, au lieu qu'il oublie la puissance de -1 ; le calcul ainsi rectifié a effectivement les propriétés annoncées, si du moins f est assez régulier. Cette note s'occupe aussi de l'application de la méthode à des équations à intégrales principales qui généralisent celles qu'a traitées le soussigné (voir ce Zbl. 9, 257 et 11, 216): pour une vaste classe d'équations, ce calcul donne un moyen de reconnaître si des théorèmes analogues à ceux de Fredholm s'appliquent. Pour terminer, l'aut. remarque que la méthode s'étend même à des systèmes d'équations.

Georges Giraud.

Toscano, Letterio: Operatori lineari e numeri di Stirling generalizzati. Ann. Mat. pura appl., IV. s. 14, 287—297 (1936).

(Cf. Idem, this Zbl. 10, 62, and Ch. Jordan, ibid. 7, 413.) The author defines the Generalized Stirling's Numbers $a_{n,i}^{(u)}$, $b_{n,i}^{(u)}$, $c_{n,i}^{(u)}$ of the first kind and the numbers $\alpha_{n,i}^{(u)}$, $\beta_{n,i}^{(u)}$, $\gamma_{n,i}^{(u)}$ of the second kind. Their explicit expressions are given for $i = 1, n$, and proper definitions, by means of suitable difference equations, for any i . Thus, for ex.,

$$a_{n,1}^{(u)} = (-1)^{n-1} u(u+1) \dots (u+n-2), \quad a_{n,n}^{(u)} = 1, \quad a_{n,i}^{(u)} = a_{n-1,i-1}^{(u)} - [n+i(u-1)-1] a_{n-1,i}^{(u)};$$

$$\alpha_{n,1}^{(u)} = u(2u-1)(3u-2) \dots [(n-1)u - (n-2)], \quad \alpha_{n,n}^{(u)} = 1, \quad \alpha_{n,i}^{(u)} = \alpha_{n-1,i-1}^{(u)} + [(n-1)(u-1) + i] \alpha_{n-1,i}^{(u)}.$$

Their values are given for $u = 1, 2$, and simple relations, for $u = 1$, to the ordinary Stirling's Numbers of the first and second kind. — The main point is to show the relation of the above numbers to any pair of "associated" (Pincherle) linear operators A, X (in a space of infinitely many dimensions), that is satisfying the relation

$$AX - XA = 1. \quad (1)$$

(This generalizes his previous research and that of Pincherle on the relation of the ordinary Stirling's Numbers to the operators $x D, D x$.) In fact, (1) leads to numerous relations connecting the operators $AX^u, X^u A, A^s X^s, X^s, A^s, Y = X^{-(u-1)}$ and the numbers $a_{n,i}^{(u)}, \dots, \gamma_{n,i}^{(u)}$ ($u = \text{integer}$). Illustration:

$$(-1)^{n-1} A^n X^n = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} a_{n,i}^{(u)} (AX^u)^i Y^i.$$

The relations are specified and further developed for $u = 1, 2$.

J. Shohat.

Pincherle, Salvatore: Su una decomposizione in fattori degli operatori normali. *Rend. Accad. Sci. Ist. Bologna*, N. s. 38, 111—116 (1934).

L'A. démontre que ses opérateurs normaux de rang r peuvent être décomposés en facteurs, dont chacun est un opérateur de rang zéro. Les propriétés des opérateurs de rang r peuvent alors être obtenus d'une manière plus simple. *Mandelbrojt*.

Kantorovič, L.: Sur la théorie générale des opérations dans les espaces semi-ordonnés. *C. R. Acad. Sci. URSS*, N. s. 1, 283—286 (1936).

Enoncé de quelques théorèmes se rattachant 1° aux opérations transformant un espace semi-ordonné linéaire en un espace de la même nature, 2° aux espaces „normés“ à l'aide des éléments d'un espace semi-ordonné et aux transformations de tels espaces. *A. Kolmogoroff* (Moskau).

Maeda, Fumitomo: Representations of linear operators by differential set functions. *J. Sci. Hiroshima Univ. A* 6, 115—137 (1936).

The first part of this paper is concerned with analogues of results in a complete Hilbert space \mathfrak{H} , when a denumerable orthonormal system of vectors is replaced by a completely additive vector valued differential set function $q(U)$, defined for all sets of a multiplicative system of sets in an abstract space V , the $q(U)$ being normalized in the sense that if $U \cdot U' = 0$ then $[q(U), q(U')] = 0$ (cf. this *Zbl.* 13, 357). In this situation summation is replaced by an integral of the Hellinger-Radon type, relative to the complex valued set function $\sigma(U, U') = [q(U), q(U')]$. Completeness of the set $q(U)$ is defined in terms of the representative or Fourier coefficient $\xi(U) = [\xi, q(U)]$ and the condition $\xi = \int_V \xi(dU) q(dU) / \sigma(dU)$, for every vector ξ of \mathfrak{H} . The set function $\xi(U)$ sets up an isomorphism with the space \mathfrak{H} , satisfying the condition $[\xi, \eta] = \int_V \xi(dU) \eta(dU) / \sigma(dU)$. A linear transformation T whose domain contains the set $\mathcal{R}(q)$, the linear manifold defined by q gives rise to a set function $\tau(U, U') = [Tq(U), q(U')]$ and an associated transformation on set functions: $\int_V \tau(U, dU') \xi(dU') / \sigma(dU')$. The composition of two transformations T_1 and T_2 corresponds to an analogue of matrix multiplication of the corresponding $\tau_1(U, U')$ and $\tau_2(U, U')$. A second complete vector differential set function $p(E)$ produces relative to q a set function on U and E of the nature of a unitary matrix. The author carries out the same program in the case in which the single function $q(U)$ is not complete in \mathfrak{H} , but where a sequence $q_n(U)$ whose linear extensions $\mathfrak{M}_n(q)$ are orthogonal have this property, the corresponding operation being a sum of Radon Hellinger integrals. — The second part of the paper applies this theory to quantum mechanics following the lines of Dirac. A state of a dynamical system at any instant being represented by vectors in a Hilbert space \mathfrak{H} , and observables by a self adjoint operator H , there is obtained a resolution of the identity $E(U)$, which via the equation $E(U) q(U') = q(U, U')$ gives rise to a vector differential set function on intervals. Assuming $q(U)$ to be complete in \mathfrak{H} , it is proved that the probability that H have a value lying within a specified range U for the state ξ is $\int |\xi(dU)|^2 / \sigma(dU)$, ξ being normalized. Application of the theory to the self adjoint operators $Qf(q) = qf(q)$, $Pf(q) = \frac{h}{2\pi i} \frac{d}{dq} f(q)$, $f(q)$ being the wave function representing the state, leads to a form of the uncertainty principle: the probability of P having a value within the range of width Δp for any state for which Q is certain to have a value within the range of width Δq is not greater than $\Delta q \Delta p / h$.

Hildebrandt (Ann Arbor).

Paley, R. E. A. C.: Some theorems on abstract spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.* 42, 235—240 (1936).

The paper gives certain results found among the papers of the late R. E. A. C. Paley, and concerning the notion of linear dimension of vectorial spaces. Let A and B be

two vectorial spaces. We write $\dim A \geq \dim B$, if B is isomorphic with a vectorial subspace of A . If $\dim A \geq \dim B$ and $\dim B \geq \dim A$, we write $\dim A = \dim B$. Finally, if $\dim A \geq \dim B$, and if it is not true that $\dim A = \dim B$, we write $\dim A > \dim B$. Let $l^{(k)}$ denote the set of all sequences $\{a_1, a_2, \dots\}$ such that $\sum_p |a_p|^k < \infty$, and let $L^{(k)}$ be the set of all functions f such that $\int_0^1 |f(x)|^k dx < \infty$. In his treatise

"Théorie des opérations linéaires" (Warszawa, 1932), Banach has established a number of relations between $\dim l^{(p)}$ and $\dim L^{(q)}$. He has shown, in particular, that (a) $\dim L^{(p)} \geq \dim l^{(p)}$, for $p > 1$, where the sign of equality occurs only when $p = q = 2$. (b) The relation $\dim l^{(q)} \leq \dim L^{(p)}$ is impossible if $q > p > 2$, or if $q < p < 2$. Completing Banach's results, Paley shows that this relation is also impossible in the cases (1) $p > 2 > q$, (2) $q > 2 > p$, (3) $2 < q < p$. The case (4) $p < q < 2$ remains open, since the indications contained in Paley's manuscript were insufficient to reconstruct the proof.

A. Zygmund (Wilno).

Variationsrechnung:

Fort, Tomlinson: Maxima and minima of finite sums. Amer. Math. Monthly **43**, 164—172 (1936).

This paper considers finite sums of the form $\Phi = \sum_{i=0}^{n-1} F(x_i, y_i, \Delta y_i)$ in which n, x_i are given and in which y_i are to be determined so as to give extreme values for Φ ; $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$. A necessary condition and a sufficient condition are given. The method is applied to the determination of a broken line with n vertices, of which the first and last are prescribed, which will furnish a surface of revolution of minimum area.

Dresden (Swarthmore).

Fubini, G.: Das Minimumprinzip. Rev. mat. hisp.-amer., II. s. **10**, 217—224 u. 268—281 (1935) [Spanisch].

The principal objects of discussion are three minimum problems. The problem of Dirichlet is handled by first choosing a sequence of functions for which the Dirichlet integral converges rapidly to its minimum value. From this sequence a new sequence is formed by single integration along abscissas or along ordinates or along families of concentric circles. These can be shown by simple estimates to converge on almost all abscissas (ordinates, circles). It follows that the original sequence of functions converges almost everywhere; and finally it is shown that the values thus found determine a solution of the Dirichlet problem. — Next follows a study of the integral equation $\varphi(x) = \lambda \int K(x, y) \varphi(y) dy$, where K is of class L_2 and symmetric on $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ and $\int \{K(x_1, y) - K(x_2, y)\}^2 dy$ tends to 0 uniformly with $|x_1 - x_2|$. The existence of characteristic numbers and functions is established by a device due to Holmgren; here a sequence u_n is chosen for which $\int u_n^2 dx = 1$ and $\int \int K(x, y) u_n(x) u_n(y) dx dy$ tends to the least possible value d , and the results are obtained through the transforms $\varphi_n = \int K u_n dy$. The third problem is that of minimizing $\int \int \{u_{xx} + u_{yy}\}^2 dx dy$. This illustrates the device of altering the problem by adding a term whose value is the same for all functions entering the discussion. Here the term added is $2 \int \int \{u_{xy}^2 - u_{xx} u_{yy}\} dx dy$, which reduces to a contour integral. The problem then becomes $\int \int \{(u_{xx})^2 + 2(u_{xy})^2 + (u_{yy})^2\} dx dy$, to which the methods of the Dirichlet problem are at once applicable.

E. J. McShane.

Carathéodory, C.: Exemples particuliers et théorie générale dans le calcul des variations. Enseignement Math. **34**, 255—261 (1935).

The author gives several simple and interesting examples of variation problems which are regular but have no minimizing curve. He also states a problem which is not regular and yet has a unique solution, and an isoperimetric problem with an infinity of solutions.

E. J. McShane (Virginia).

Pâquet, Victor: Sur la formule fondamentale de la théorie invariante du calcul des variations. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 22, 40—45 (1936).

The note deals with a number of identities involving the first variation in the n -dimensional Calculus of Variations problem. *M. S. Knebelman* (Princeton).

Manià, Basilio: Proprietà delle estremanti nei problemi di Lagrange. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 5, 89—126 (1936).

Several recent papers have dealt with the existence of solutions of Lagrange problems, showing that under suitable hypotheses there exists a rectifiable curve (or in ordinary problems a set of absolutely continuous functions) which minimizes the given integral in the class of curves (or functions) satisfying the given differential equations. The first object of this paper is to show that under suitable conditions the solutions of such problems must satisfy the Euler-Lagrange equations with certain Lagrange multipliers. This is not covered by theorems in the literature, which require too strong a set of differentiability conditions to apply here. First the parametric problem is considered; it is supposed that a curve C_0 minimizes an integral $\int G(x, y, x', y', u) ds$ in the class of curves satisfying an equation $u' = F(x(s), y(s), x'(s), y'(s), u)$ almost everywhere, with $u(0) = u_0$. (The final value of u is left free.) It is shown that C_0 must satisfy the equation

$$\int_0^s [G_x + \lambda F_x + G_u + \lambda F_u + \lambda' F_x] ds - \frac{d}{ds} \int_0^s (G_{x'} + \lambda F_{x'}) ds = \text{const}, \quad (*)$$

with an analogous equation obtained by replacing subscripts x, x' by y, y' . For $\lambda(s)$ an explicit expression is given; it is the integral of the product of G_u by a certain exponential formed from F_u . This explicit expression is quite useful; for if, say, $G_u \geq 0$, then $\lambda \geq 0$, and if we assume that $G + \mu F$ is a regular integrand for all $\mu \geq 0$, it can be shown just as in simple (free) problems that equations (*) imply the existence of first and second derivatives along C_0 . — It is pointed out that the method developed applies also to problems with several side-equations if these are in the form $x'_j = F_j(x, y, x', y', u_1, \dots, u_j)$, $j = 1, \dots, n$. Next the problem in ordinary form is studied. Analogous results are obtained, but as in simple (free) problems it is necessary to make assumptions restricting the rate of growth of some of the partial derivatives. The analogue of (*) is proved and also the equation obtained by replacing $G_{x'}, F_{x'}$ by $(G - y_0 G_{y'})$, $(F - y'_0 F_{y'})$ respectively. *E. J. McShane* (Virginia).

Morse, Marston: Generalized concavity theorems. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 21, 359—362 (1935).

Funktionentheorie:

Golusin, G.: Zum Majorationsprinzip der Funktionentheorie. Rec. math. Moscou 42, 647—649 u. deutsch. Zusammenfassung 650 (1935) [Russisch].

L'A. généralise un certain complément du principe de Lindelöf, dû à Rogosinski [Math. Z. 17 (1923)]. Soit $F(z)$ une f. rég. pour $|z| < R$, $F(0) = 0$, soit B un dom. simp. con., convexe, et supposons que $\omega = f(z)$, $f(0) = 0$, représente $|z| < R$ sur B .

Les valeurs que prend $\int_0^z \frac{F(z)}{z} dz$ dans $|z| < r$, $r < R$, sont contenues dans le dom. obtenu en transformant $|z| < r$ par $\int_z^{\omega} \frac{f(z)}{z} dz$, et ceci quel que soit $r < R$. Le cas de

Rogosinski est celui où B est un demi-plan. *Mandelbrojt* (Clermont-Ferrand).

Levinson, Norman: On the non-vanishing of certain functions. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 22, 228—229 (1936).

L'A. démontre le théorème suivant: Soit $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i n x}$, $|a_{-n}| \leq e^{-\theta(n)}$ ($n=1, 2, \dots$).

Où $\theta(u)$ est une fonction non-décrois., telle que $\int_1^{\theta(u)} \frac{du}{u^2} = \infty$. Soit $\Phi(x) \in L(-\pi, \pi)$

et $\Phi(x) \sim \sum_1^\infty b_n e^{i n x} + \sum_0^\infty b_{-n} e^{-i \lambda_n x}$, $\lambda_n > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n} = 0$. Si $f(x) = \Phi(x)$, presque partout sur un intervalle partiel, $f(x) = \Phi(x)$ partout dans $(-\pi, \pi)$. La démonstration de ce théorème est basée sur le th. suiv.: Si $m_n < m_{n+1} \dots$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{m_n} = D$, $m_{n+1} - m_n \geq \alpha$ ($n = 1, 2, \dots$); si $a < \pi D$, et $f(x) \subset L(-a, a)$, $\int_{-a}^a f(x) e^{i m_n x} dx = O(e^{-\theta(n)})$, où $\theta(u)$ vérifie les conditions précédentes, alors $f(x) \equiv 0$. (L'A. de cette analyse signale qu'il y a lieu de comparer ces résultats, aux résultats qu'il a exposés dans son livre [Séries de Fourier et classes quasi-analytiques de fonctions, 1935; ce Zbl. 13, 110].)

Mandelbrojt (Clermont-Ferrand).

Ritt, J. F.: Indeterminate expressions involving a function and its derivatives. *Mh. Math. Phys.* 43, 97—104 (1936).

Let $y = A/B$, where A and B are polynomials in $u(x)$ and a number of its derivatives with analytic functions of as coefficients. The problem of attributing a meaning to y when u is so chosen that both A and B vanish identically in x has been considered previously by the author (this Zbl. 5, 394) who prescribed, under formal conditions which are not restrictive, that a function \bar{y} shall correspond to a function \bar{u} through the relationship $y = A/B$ if \bar{u} , \bar{y} is a solution in the general solution (ibid) of $B y - A = 0$. The restriction on \bar{u} and \bar{y} was shown to imply only that the Taylor expansions of \bar{u} , \bar{y} are the limits, respectively, of the Taylor expansions of functions u , y constituting a solution in the general solution and not causing B to vanish. The conjecture was made by the author that if \bar{u} is so chosen that $A \equiv B \equiv 0$, then either \bar{y} is restricted to being a single analytic function (possibly the infinite constant) or \bar{y} may be any analytic function. In the present paper the truth of this conjecture is established in the case in which A and B are of the first order at most in u . *Raudenbush*.

Carathéodory, C.: Über beschränkte Funktionen, die in einem Paar von vorgeschriebenen Punkten gleiche Werte annehmen. *Mh. Math. Phys.* 43, 225—241 (1936).

Let $f(z)$ be regular for $|z| < 1$, $|f(z)| < 1$, $f(0) = 0$ and $f(z_1) = f(z_2)$. Here z_1 and z_2 are given values, $z_1 \neq z_2$, $0 < |z_1|, |z_2| < 1$. The author calculates $\max |f'(0)|$ obtaining different solutions in different regions, characterized by certain conditions in terms of z_1, z_2 , and separated from one another by a definite algebraic manifold. The extremum functions have the form

$$f(z) = \varepsilon P(z)/P^*(z), \quad |\varepsilon| = 1,$$

$P(z)$ being a polynomial of the second or third degree the zeros of which are in $|z| < 1$, $P^*(z)$ the corresponding "reciprocal" polynomial. Under the same condition [giving up only $f(0) = 0$] the maximum of $|f'(z_0)|$ can be also determined, z_0 being a preassigned value. The result is in qualitative respect similar to that above, the separation set being in this case a bicircular curve of the 4-th order. — The elegance and unexpected form of the solutions of the problems dealt with is the best refutation of the author's opinion considering the study of extremum problems regarding bounded functions as an endeavour not worth while anymore.

G. Szegő (St. Louis, Mo.).

Robinson, Raphael M.: A note on Chen's paper, „On the theory of schlicht functions“. *Tôhoku Math. J.* 41, 327—328 (1936).

L'A. démontre qu'un théorème énoncé par Chen n'est pas exact [*Tôhoku Math. J.* 40, 160—174 (1935); ce Zbl. 11, 29].

Mandelbrojt (Clermont-Ferrand).

Rosenblatt, Alfred: Sur la représentation conforme des domaines bornés limités par des courbes générales. *C. R. Acad. Sci., Paris* 202, 1832—1834 (1936).

L'auteur trouve, en se servant de l'équation intégrale de Lichtenstein, la fonction représentative sur le cercle unité du domaine S limité par une courbe de Jordan C rectifiable, fermée, sans point double. Sans que cela soit dit explicitement, il semble résulter des hypothèses faites par l'auteur que S est étoilé par rapport à l'origine et que C admet partout une tangente variant de façon continue. *E. Blanc* (Paris).

Pick, Georg: Zur konformen Abbildung von Kreishogenpolygonen auf die Halbebene. *Mh. Math. Phys.* **43**, 29—43 (1936).

Verf. bildet spezielle Kreishogenpolygone auf die Halbebene ab. Er untersucht den Fall, in dem sich das Polygon aus einer Anzahl von Elementardreiecken der Modulfigur zusammensetzt, in dem also die Abbildung durch Vermittlung der Schwarzischen Dreiecksfunktionen gewonnen werden kann. Die Aufstellung der Differentialgleichung zeigt, wie in diesem speziellen Fall der einzige wesentliche Parameter (außer den Winkeln) des Kreis- r -Ecks mit der einzigen wesentlichen Konstanten der Differentialgleichung verknüpft ist, eine Beziehung, die in jedem speziellen Fall besonderes Interesse verdient, da allgemein die Abhängigkeit der $(2r - 6)$ Konstanten von den $(2r - 6)$ Parametern noch völlig im Dunkel ist. *v. Koppenfels* (Hannover).

Wagner, Helmut: Über eine Klasse Riemannscher Flächen mit endlich vielen nur logarithmischen Windungspunkten. *J. reine angew. Math.* **175**, 6—49 (1936).

Die Differentialgleichung

$$\frac{w'''}{w'} - \frac{3}{2} \left(\frac{w''}{w'} \right)^2 = P(z),$$

wo $P(z)$ ein Polynom vom Grade $p - 2$ ist, hat nach R. Nevanlinna als Lösungen meromorphe Funktionen der Ordnung $\frac{p}{2}$, die über der w -Ebene Riemannsche Flächen mit p logarithmischen und keinen algebraischen Windungspunkten erzeugen. Es ist wichtig zu untersuchen, in welcher Weise die Lage der Windungspunkte und die Struktur der R. Fl. von den Koeffizienten des Polynoms abhängen. — Nevanlinna hat selbst mit Hilfe der Laplaceschen Transformation die Fälle erledigt, wo $P(z)$ eine reine Potenz oder ein quadratisches Polynom ist. Der Verf. zeigt nun, daß dieselbe Transformation auf jedes Polynom der Form $P(z) = -2Mz^{2n-2} - 2Nz^{n-2}$ ($p = 2n$) angewandt werden kann. Durch einfache Normierung kann man dies auf den Fall $P(z) = -2z^{2n-2} - 2cz^{n-2}$ zurückführen, und man findet, daß die logarithmischen Stellen zwei konzentrische, reguläre n -Ecke bilden. Für besondere Werte von c können diese zusammenfallen oder das eine n -Eck kann sich auf den Punkt 0 oder ∞ zusammenziehen. In diesen Fällen läßt sich die Struktur der Fläche eindeutig feststellen. Es ist noch bemerkenswert, daß die Lage der logarithmischen Stellen explizit mit Hilfe von Γ -Funktionen angegeben werden kann. *Ahlfors* (Cambridge, Mass.).

Whittaker, J. M.: The asymptotic periods of integral and meromorphic functions. *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, II. s. **4**, 254—257 (1936).

L'auteur étend aux fonctions méromorphes dont l'exposant de convergence des poles, k , est inférieur à l'ordre ρ , ses résultats antérieurs sur les périodes asymptotiques des fonctions entières (voir ce Zbl. **10**, 308; **12**, 155). Il montre qu'il n'y a pas de période asymptotique si $0 \leq k < \rho < 1$ et qu'elles forment au plus une suite $n\omega$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ si $0 \leq k = \rho < 1$. Deux méthodes sont indiquées, l'une analogue à celle employée pour les f. entières donne le premier résultat, l'autre basée sur la représentation de la fonction par une formule d'interpolation permet de tout obtenir.

G. Valiron (Paris).

Dinghas, Alexander: Beiträge zur Theorie der meromorphen Funktionen. *Schr. math. Semin. u. Inst. angew. Math. Univ. Berlin* **3**, 67—92 (1936).

Ausgehend von einer allgemeinen funktionentheoretischen Beziehung von F. und R. Nevanlinna werden, durch geeignete Wahl einer in dieser Beziehung enthaltenen Hilfsfunktion, verschiedene Formeln aufgestellt, welche für die Untersuchung der Wertverteilung einer meromorphen Funktion in einem Kreis oder in einem Winkelraum verwertet werden können. Der Hauptteil der Untersuchung beschäftigt sich mit dem Borelschen Satz, nach welchem die Verteilung von drei Stellensorten genügt, um die Größenordnung der charakteristischen Funktion und damit die asymptotischen Eigenschaften einer meromorphen Funktion im wesentlichen zu bestimmen. Es wird eine Ungleichung hergeleitet, welche die aus dem ersten Hauptsatz der Theorie der mero-

morphes Funktionen folgende Beziehung $N(r, c) < T(r) + O(1)$ erweitert und die von einer willkürlichen Hilfsfunktion $\lambda(r)$ abhängig ist. Die Charakteristik T wird dann, wie üblich, mittels des zweiten Hauptsatzes durch die Summe von drei Anzahlfunktionen majoriert. Durch geeignete Wahl von λ werden verschiedene Sätze über meromorphe Funktionen endlicher, unendlicher und nullter Ordnung aufgestellt, welche die üblichen Fassungen des Borelschen Satzes verschärfen. Der Unterschied zwischen den ganzzahligen und den nichtganzzahligen endlichen Ordnungen wird vom Verf. nicht berücksichtigt. Für Funktionen nichtganzzahliger Ordnung, sowie der Ordnung Null, gibt es bekanntlich höchstens einen Borelschen Ausnahmewert. Mit Hilfe der Theorie der kanonischen Produkte würde es wahrscheinlich gelingen, zu entscheiden, ob dasselbe für die vom Verf. betrachteten Ausnahmewerte gilt. *Rolf Nevanlinna* (Helsinki).

Bernstein, Vladimiro: *Sulle proprietà caratteristiche delle indicatrici di crescenza delle trascendenti intere d'ordine finito.* Mem. Accad. Ital. 7, 131—189 (1936).

Ce mémoire développe une Note aux C. R. Acad. Sci., Paris déjà analysée (ce Zbl. 13, 122). La méthode consiste à remplacer une fonction entière $\Phi(Z)$ du type moyen de l'ordre ϱ par la fonction multiforme $f(z)$ qui s'en déduit par la transformation $z = Z^e$. $f(z)$ a une singularité transcendante à l'infini (ou algébrique si ϱ est rationnel), son indicatrice de croissance se déduit de celle de $\Phi(Z)$. A une fonction $f(z)$ ayant la singularité envisagée à l'infini, fonction qui peut être déduite de la connaissance de sa transformée de Laplace-Borel-Pólya $F(z)$, correspondra une fonction entière $\Phi(Z)$ si $F(z e^{2i\pi e}) = e^{-2i\pi e} F(z)$. La recherche de fonctions $F(z)$ jouissant de cette propriété et pouvant conduire à $\Phi(Z)$ nécessite une étude minutieuse de la transformation de Laplace et de son inverse sur le domaine riemannien où est définie $F(z)$.

G. Valiron (Paris).

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:

Feldheim, E.: *Une loi-limite du calcul des probabilités.* Acta Litt. Sci. Szeged 8, 55—63 (1936).

Si p est la probabilité constante d'un événement fortuit E et m le nombre d'épreuves où E s'est produit au cours de n épreuves successives, la probabilité de l'inégalité

$$t_1 < \frac{m - np}{\sqrt{np(1-p)}} < t_2$$

tend pour $n \rightarrow \infty$ vers

$$P(t_1, t_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Suivant Khintchine [Math. Ann. 101, 745 (1929)] on a pour $t_1 = t + \frac{g_1}{t}$, $t_2 = t + \frac{g_2}{t}$ ($0 \leq g_1 \leq g_2 \leq +\infty$) la formule

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P(t_1, t_2)}{P(t, \infty)} = e^{-g_1} - e^{-g_2}, \quad (t = O(\sqrt{n})).$$

L'auteur donne une démonstration élémentaire de cette formule et il étudie le problème des tirages d'une urne sous les conditions suivantes: une urne contient Np boules blanches et Nq noires ($p + q = 1$); on tire une boule et on remet non seulement la boule tirée mais encore γN boules de la même espèce. Soit P_m la probabilité de tirer m boules blanches dans n épreuves. L'auteur donne une expression asymptotique de P_m sous les hypothèses suivantes: n augmentant indéfiniment p et γ tendent vers zéro de sorte que $\frac{p}{\gamma}$ conserve une valeur finie $\frac{1}{r}$ et $n\gamma$ tend vers l'infini; il démontre que le quotient des probabilités des deux inégalités

$$\text{et} \quad \frac{n\gamma}{\mu r} \left(t + \frac{a}{t^{r-1}} \right)^r < m < \frac{n\gamma}{\mu r} \left(t + \frac{b}{t^{r-1}} \right)^r \quad \left(\begin{matrix} 0 < a < b \\ r > 1 \end{matrix} \right)$$

$$\frac{n\gamma}{\mu r} t^r < m < \infty$$

tend vers $e^{-\frac{a}{\mu}} - e^{-\frac{b}{\mu}}$, si n et t tendent vers l'infini, γ tendant vers zéro. — Remarquons que les hypothèses énoncées par l'auteur sur la manière dont changent n , p et γ devraient être complétées, si l'on voulait appliquer ses formules à un cas réel. En effet, 1° si p tend vers zéro, N (nombre total de boules avant le premier tirage) doit augmenter indéfiniment; 2° si γ tend vers zéro, n doit augmenter suivant une fonction de γ ; il faut donc changer le facteur γ au cours des expériences. *B. Hostinský (Brno).*

Wilks, S. S.: The sampling theory of systems of variances, covariances and intraclass covariances. Amer. J. Math. 58, 426—432 (1936).

Let a system of variables y_p ($p = 1, 2, \dots, n$), each with zero mean, be distributed according to a normal frequency law. The characteristic function of the quantities $\xi_{pq} = y_p y_q$ is well-known but the author observes that if this characteristic function factors into a product of factors of essentially the same form, the factors can be identified as themselves characteristic functions of linear forms of variances and covariances formed from the y 's. These linear systems are then independent of each other and their distribution laws can be written down. The theorem which summarizes this result can then be used to handle the sampling theory of variances, covariances, and intraclass covariances in such systems of normally distributed variables. The method is illustrated by application to the generalized intraclass correlation problem. *Craig (Ann Arbor).*

Kullback, Solomon: The distribution laws of the difference and quotient of variables independently distributed in Pearson type III laws. Ann. math. Statist. 7, 51—53 (1936).

By the use of characteristic functions the author obtains two known results for the distribution functions of the difference and the difference of the logarithms of two variables obeying type III laws respectively. *C. C. Craig (Ann Arbor, Mich.).*

Simonson, William: Über die Grundformeln der Invaliditätsversicherung. Skand. Aktuarie Tidskr. 19, 27—51 (1936).

Diese Arbeit enthält Beschreibung der Entwicklung einer Gesamtheit im Laufe der Zeit und ihrer Spaltung in Teilgesamtheiten unter dem Einfluß der gegebenen Ausscheidewahrscheinlichkeiten und Berücksichtigung der wechselseitigen Wanderungen. Das Problem wird an konkretem Beispiel der Gesamtheit der Aktiven durch die Integralgleichung vom Volterraschen Typus gelöst, und zwar unter der Annahme, daß die Sterbensintensitäten aktiver und invalider Personen sowie die Invaliditätsintensität sowohl vom erreichten Alter des betreffenden Individuums als auch von dessen letzter Aktivitäts- bzw. Invaliditätsdauer abhängen. Anfangs wird vorausgesetzt, daß diese Intensitäten davon unabhängig seien, wie oft das Individuum der betrachteten Gesamtheit angehört hat. Diese Voraussetzung wird im dritten Teile der Arbeit fallen gelassen. Durch passend gewählte Symbolik wird die Klärung einiger Begriffe erreicht. Es wird auf die praktische Anwendungsmöglichkeit dieser Theorie auch in der Bevölkerungsstatistik und in der Krankenversicherung hingewiesen. *Janko.*

Berger, Alfred: Über den Einfluß einer Änderung der Sterblichkeit auf die Prämienreserve. Skand. Aktuarie Tidskr. 19, 52—54 (1936).

Per Vasmoe hat in einer gleichnamigen Arbeit in Skand. Aktuarie Tidskr. 1935 (dies. Zbl. 11, 264) bewiesen, daß es unendlich viele Absterbeordnungen gibt, die für die gemischte Versicherung mit gleichbleibender Prämie während der ganzen Versicherungsdauer zu denselben Prämienreserven führen; allerdings sind diese Absterbeordnungen vom Erfüllungsalter abhängig. Verf. gibt hierfür einen neuen einfachen Beweis an. *Robert Frucht (Triest).*

Numerische und graphische Methoden.

Reichel, Heinrich: Zur Frage des Gewichtes der beiden Konstanten einer linearen Gleichung. Österr. Z. Vermessgswes. 34, 21—23 (1936).

Wong, Y. K.: On standard error for the line of mutual regression. *Ann. math. Statist.* **7**, 47—50 (1936).

The author obtains two other forms for the variance of the residuals for the line of mutual regression in two variables and calls attention to a misprint in this connection in Karl Pearson's fundamental paper on this subject. *C. C. Craig* (Ann Arbor, Mich.).

Ansermet, A.: Note sur le calcul de l'ellipse d'erreur. *Schweiz. Z. Vermessgswes.* **34**, 138—141 (1936).

Verf. ist der Ansicht, daß der Fußpunktskurve der Fehlerellipse bei der Betrachtung mittlerer Fehlergrößen hinsichtlich der Punktbestimmung durch Einschneiden u. dgl. eine mehr didaktische als praktische Bedeutung zukommt. Hingegen verdient der Kreis („cerce orthoptique“), dessen Radius gleich dem mittleren Punktfehler ist, mehr beachtet zu werden, als es allgemein üblich ist. Auf Grund der Tatsache, daß dieser Kreis der geometrische Ort für die Eckpunkte aller Rechtecke ist, die die Fehlerellipse einhüllen, wird insbesondere eine einfache elementare Konstruktion der Elemente der Fehlerellipse angegeben. Auf die Behandlung des allgemeinen Falles, daß gleichzeitig mehrere Neupunkte bestimmt werden, wird kurz hingewiesen. *Schmehl*.

Baerwald, H. G.: Some relations between transient phenomena in systems with similar frequency characteristics. *Philos. Mag.*, **VII**, s. **21**, 833—869 (1936).

Verf. stellt sich das Ziel, eine Zeitfunktion mit vorgegebenem Fourierspektrum durch eine andere Zeitfunktion mit ähnlichem, aber einfacherem Fourierspektrum zu ersetzen und zu berechnen, welche Fehler entstehen, wenn statt der erstgenannten vorgegebenen Zeitfunktion eine vereinfachte Zeitfunktion auf verschiedene vorgegebene Systeme wirkt. Hierzu macht er von der symbolischen Rechenweise mit Hilfe des Laplace-Integrals Gebrauch, und zwar in der Form, wie sie von Wagner und Bromwich gegeben ist. Er stellt zu Anfang der Berechnung die Bedingungen auf, welchen die Funktion genügen muß, die das vorliegende System darstellt. In der Hauptsache beziehen sich diese auf die Lage der Pole und Nullstellen in der komplexen Ebene. Auch die Quellenfunktion muß einigen Bedingungen genügen, damit die unendlichen Integrale konvergieren. Die Berechnungen verlaufen elementar, während die Formelergebnisse sich nicht einfach in Worten angeben lassen. *M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

Antoniou, I. S.: Die graphische Konstruktion der derivierten Kurve. *Bol. mat.* **9**, 33—39 (1936) [Spanisch].

Valtat, Raymond: Machine à calculer fondée sur l'emploi de la numération binaire. *C. R. Acad. Sci., Paris* **202**, 1745—1747 (1936).

Ocagne, Maurice d': Observations relatives à la note de M. Raymond Valtat. *C. R. Acad. Sci., Paris* **202**, 1747—1748 (1936).

Die Multiplikation zweier Zahlen ist im Zweiersystem einfacher als in jedem anderen, da das Einmaleins aus der einzigen Aussage $1 \cdot 1 = 1$ besteht. Eine Multiplikationsmaschine in diesem System verlangt also nur, daß an jeder Stelle des Zählwerks eine gewisse Einwirkung entweder stattfindet oder nicht stattfindet. Eine solche Maschine muß aber, um für uns brauchbar zu sein, noch zwei Nebeneinrichtungen haben, die eine im Zehnersystem geschriebene Zahl ins Zweiersystem und umgekehrt überführen. Die erste wird codifieur, die zweite traducteur genannt. — In seinen Zusatzbemerkungen berichtet d'Ocagne, daß zufällig zur selben Zeit, als er die Entwürfe von Valtat erhielt, ihm auch eine Mitteilung von Lucien Malassis zukam, worin auf einen bemerkenswerten Anhang des (sehr seltenen) Buches *Rhabdologia* von Neper aufmerksam gemacht wird, der eine Darstellung der Multiplikation im Zweiersystem enthält: werden die Zellen eines Schachbretts mit den Werten 2^{i+k} besetzt und der eine Faktor aus den Anfangszahlen der Zeilen, der andere aus den Anfangszahlen der Spalten zusammengesetzt, so ergibt die Summe der an den Kreuzungsstellen der so hervorgehobenen Reihen stehenden Zahlen das Produkt der beiden Faktoren. *L. Schrutka* (Wien).

Vidal, Paulino Castells: Sur une machine à résoudre les systèmes d'équations linéaires. C. R. Acad. Sci., Paris 202, 1748—1751 (1936).

Die mechanische Auflösung eines Systems linearer Gleichungen erfordert folgende Einrichtungen: 1. Verschiebungen, die die Werte der Unbekannten wiedergeben, 2. Verschiebungen, die die Produkte der Unbekannten mit ihren Koeffizienten darstellen, 3. Bildung der algebraischen Summe dieser Produkte, 4. Erzwingung der Übereinstimmung der Verschiebungen, die derselben Unbekannten in allen Gleichungen entsprechen, 5. Umkehrbarkeit der Vorrichtungen, die die Werte der Unbekannten mit denen der rechten Seiten der Gleichungen verknüpfen. Es wird, ganz knapp, eine aus Zahnrädern und dazwischengesetzten Zahnstangen aufgebaute Einrichtung beschrieben, die diese Aufgaben löst.

L. Schrutka (Wien).

Wertheimer, Albert: The graphical transformation of curves into straight lines and the construction of alignment charts. J. Franklin Inst. 219, 343—363 (1935).

In der (x, y) -Ebene liege eine von einem Parameter abhängende Kurvenschar empirisch vor, sei also nicht analytisch gegeben. Es werden notw. und hinreichende Kriterien dafür angegeben, daß diese Schar in eine Geradenschar verzerrt werden kann, ferner Methoden zur praktischen Ausführung und zur Herstellung „angenäherter“ geradliniger Netztafeln auch in solchen Fällen, in denen jene Kriterien nicht erfüllt sind.

F. Rehbock (Bonn).

Geometrie.

● **Mitra, Pramatha Nath:** Text book of spherical trigonometry. Calcutta: Univ. press 1935. XXII, 163 pag.

Eine historische Einleitung gibt in knapper Form die Entwicklung der Trigonometrie von Thales bis auf die Neuzeit mit besonderer Berücksichtigung indischer Autoren. Kap. I befaßt sich mit der Geometrie der Sphäre (Sphärik). In Kap. II werden die Eigenschaften sphärischer Dreiecke erörtert und in Kap. III die wichtigsten Formeln für die Auflösung solcher Dreiecke abgeleitet. Kap. IV behandelt rechtwinklige und rechtseitige sphärische Dreiecke. Kap. V gibt verschiedene Sätze über Halbierungslinien, sphärische Senkrechte und Normalkoordinaten. Kap. VI befaßt sich mit dem Flächeninhalt sphärischer Drei- und Vielecke und dessen Zusammenhang mit dem sphärischen Exzeß. Kap. VII behandelt die Eigenschaften der In- und Umkreise sowie des Hartschen Kreises. Sämtliche Kapitel sind mit vielen Aufgaben meist theoretischer Natur versehen.

A. Michailov (Moskau).

Merz, K.: Der Oktaeder-Oktant oder ein Heptaeder. Comment. math. helv. 8, 379—381 (1936).

Schneidet man ein Heptaeder längs eines Randdreieckes auf, so erhält man sein Netz. Dieses besteht demnach aus vier gleichseitigen Dreiecken und drei durch je eine Diagonale halbierten Quadraten. Bemerkungen und Literaturangaben über die Entdeckung des Heptaeders ergänzen die Arbeit.

J. J. Burckhardt (Zürich).

Bussey, W. H.: Geometric constructions without the classical restriction to ruler and compasses. Amer. Math. Monthly 43, 265—280 (1936).

A lecture given to American teachers at the meeting in Ann. Arbor, 1935. The main purpose is to influence them "to see to it, that their students get some knowledge of geometric constructions without the classical restrictions; they should not be told or given the impression that there is anything un-mathematical about graded rulers, T -squares and other simple instruments". Constructions for trisecting an angle and for duplicating a cube, with the aid of a graded ruler (the neusis constructions) or by means of a carpenter's square.

O. Bottema (Deventer, Holland).

Carrus, S.: Sur une classe remarquable de courbes gauches. Bull. math. Fac. Sci. et grandes Écoles 2, 161—168 (1935).

Die drei Koordinaten und die Bogenlänge der allgemeinsten Raumkurve werden integrallos durch zwei willkürliche Funktionen der geographischen Breite t des sphärischen Tangentenbildes ausgedrückt. Als die eine dieser Funktionen kann die geographische Länge $\lambda(t)$ des Tangentenbildes gewählt werden. Die einigermaßen

verwickelten Ausdrücke werden im Spezialfall $\lambda(t) = t$ eingehender diskutiert. — Wie Verf. erwähnt, hat sich nach einer Bemerkung von Liouville bereits Serret mit der obigen Frage erfolgreich beschäftigt; sein Resultat scheint jedoch nicht publiziert zu sein.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Menger, Karl: New foundations of projective and affine geometry. *Algebra of geometry*. Ann. of Math., II. s. 37, 456—482 (1936).

Gegeben ist eine Klasse von Symbolen A, B, \dots (als lineare Gebiete des Raums), zwischen denen zwei Verknüpfungen $\cdot, +$ axiomatisch definiert sind; $A \cdot B$ ist das größte gemeinsame Durchschnittsgebiet, $A + B$ das kleinste Vereinigungsgebiet von A und B . Zunächst werden in Analogie zur abstrakten Algebra 4 in bezug auf beide Verknüpfungen duale Axiome aufgestellt, in denen insbesondere die Existenz des Nullelements V der Addition und des Einselements U der Multiplikation gefordert wird, und einige Folgerungen gezogen. Alle Voraussetzungen sind in der projektiven Geometrie erfüllt. Nach Definition des Begriffs Untergebiet wird ein Punkt als ein solches Gebiet definiert, das außer sich selbst und V kein Untergebiet enthält, die Ebene als ein solches, das außer in U und sich selbst in keinem Gebiet enthalten ist. — Alsdann wird ein zweites Axiomensystem aufgestellt, aus dem in gleicher Weise die affine und die projektive Geometrie begründet werden kann; der Übergang von der ersten zur zweiten geschieht durch Hinzunahme eines Axioms, das das System ausnahmslos dual macht. Der Begriff der linearen Abhängigkeit von Punkten und Ebenen wird erklärt und eine notwendige und hinreichende Bedingung für lineare Abhängigkeit gegeben. Mit Hilfe einer jedem Element $A \neq V$ zugeordneten Zahl, die die Anzahl der linear unabhängigen Punkte, deren Summe A ist, angibt, wird der Dimensionsbegriff eingeführt. Nimmt man weiter den „Teilerkettensatz“ als neues Axiom hinzu (jede eigentlich monotone Folge von Gebieten bricht ab), so kann jedem Element eine endliche Zahl als Dimension zugeordnet werden, womit eine Klassifikation der Elemente des n -dimensionalen Raumes gewonnen ist. Es gilt insbesondere:

$$\dim V = -1,$$

$$\dim A = 1 + \max \cdot \dim A' \text{ für alle } A' \subset A,$$

$$\dim A + \dim B = \dim(A + B) + \dim(A \cdot B).$$

Aus dem hier gegebenen Axiomensystem kann man weiter die der Geometrie von Veblen und Young zugrunde gelegten Axiome kalkülmäßig ableiten, z. B. die eindeutige Bestimmung der Geraden durch zwei Punkte und das Axiom der Ebene. Nach Einführung des Begriffs Simplex und der nicht entarteten Elemente wird dann der Zerlegungssatz des projektiven Raumes in eine direkte Summe bewiesen. Es folgt ein Exkurs über den Parallelismus und die affine Geometrie. Am Schluß wird eine tabellarische Zusammenstellung der Axiome gegeben. R. Moufang (Frankfurt a. M.).

Falla, Louis: Sur une involution du second ordre dont les groupes appartiennent aux rayons d'un complexe linéaire. *Bull. Acad. Roy. Belg.*, V. s. 22, 606—614 (1936).

Brauer, Richard: A characterization of null systems in projective space. *Bull. Amer. Math. Soc.* 42, 247—254 (1936).

Es wird gezeigt: Jede eindeutige Korrespondenz, welche jedem Punkte P eine durch P gehende Hyperebene ε zuordnet, derart, daß den Punkten Q von ε Hyperbenen durch P zugeordnet sind, ist ein Nullsystem, d. h. ist durch die Gleichungen

$$u^i = \sum a^{ik} x_k, \quad a^{ik} = -a^{ki}$$

gegeben. [Vgl. v. d. Waerden, *Nieuw Arch. Wiskde* 15, 154 (1928)]. Der Satz ist enthalten in dem folgenden: Jede Korrelation von der Periode 2 ist entweder ein Nullsystem oder eine Polarität oder eine Hermitesche Polarität

$$u^i = \sum a^{ik} x_k^s,$$

wo S ein Automorphismus von der Periode 2 des Grundkörpers K ist. Bei allen diesen Sätzen wird keine Stetigkeit vorausgesetzt.

van der Waerden (Leipzig).

Scott, T.: A geometrical interpretation of the symmetrical invariant of three ternary quadratics. Proc. Edinburgh Math. Soc., II. s. 4, 258—261 (1936).

Drei Kegelschnitte α, β, γ in einer Ebene: $a_x^2 = 0, b_x^2 = 0, c_x^2 = 0$ besitzen eine symmetrische Invariante $(abc)^2$. Die Gleichung $(abc)^2 = 0$ bedeutet folgendes: Es sei $\Phi_{\alpha\beta} = 0$ die Envelope der Geraden, die α, β in zwei harmonischen Punktepaaren schneiden, und so $\Phi_{\beta\gamma}, \Phi_{\gamma\alpha}$; die Polaren in bezug auf α, β, γ der drei Pole einer jeden Gerade in bezug auf $\Phi_{\beta\gamma}, \Phi_{\gamma\alpha}, \Phi_{\alpha\beta}$ gehören einem Büschel an. Die Ausdehnung im gewöhnlichen und in den mehrdimensionalen Räumen ist unmittelbar. *E. G. Togliatti.*

Rybakov, B.: Courbes fermées à doubles points sur la sphère. Bull. Sci. Univ. Kiev, Rec. math. 1, 178—197 u. franz. Zusammenfassung 197 (1935) [Ukrainisch].

L'auteur discute les types topologiques des courbes fermées à n points doubles sur la sphère. Il introduit pour ces courbes deux invariants topologiques: le rang et la distance, qui sont suffisants pour déterminer tous les types distincts au cas $n=6$.

W. Ephrämowitsch (Moscou).

Differentialgeometrie:

Kowalewski, Gerhard: Verallgemeinerte Evolutentheorie. Mh. Math. Phys. 43, 242—260 (1936).

Aufbauend auf die Cesàro-Picksche Geometrie und die Liesche Theorie der kontinuierlichen Gruppen entwickelt Verf. die folgende Evolutendefinition einer ebenen Kurve γ : Aus einem beliebigen Punkt ζ und den ersten $(r-3)$ Ableitungen des Kurvenpunktes kann man eine Invariante ω der r -gliedrigen Gruppe bilden. Fordert man jetzt, daß längs der Kurve, bei festgehaltenem ζ , die Differentiale $d\omega$ und $d^2\omega$ verschwinden, so erhält man eine invariante Beziehung zwischen ζ und dem Kurvenelement $(r-1)$ -ter Ordnung e . Durchläuft e die Kurve, so beschreibt ζ die „Evolute“. Für die Bewegungsgruppe fällt diese Benennung mit der üblichen zusammen. — Nach der Durchführung einiger Beispiele und naheliegender Probleme zeigt Verf., daß die verallgemeinerten Evoluten als Fixpunktort der oskulierenden infinitesimalen Transformationen längs der Kurve gedeutet werden können, wobei die oskulierende inf. Transformation in geeigneter Weise aus den Grundtransformationen abgeleitet wird.

W. Haack (Berlin).

Pylarinos, O.: Sur les systèmes de surfaces triples orthogonaux. Math. Ann. 112, 767—774 (1936).

Es werden einige hinreichende Bedingungen für die Einbettbarkeit einer Flächenschar in ein Orthogonalsystem abgeleitet, von denen die einfachste lautet: Wenn die Flächenscharen $f_1 = \text{konst.}$, $f_2 = \text{konst.}$ und $(\text{grad } f_1)^2/(\text{grad } f_2)^2 = \text{konst.}$ sämtlich eine feste Flächenschar senkrecht schneiden, so ist letztere einbettbar. *W. Feller.*

Derwidué, Léon: Sur une congruence linéaire de cubiques gauches. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 5, 120—123 (1936).

Sintsov, D. M.: Sur les congruences des courbes dans l'espace. Commun. Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff et Soc. Math. Kharkoff, IV. s. 13, 65—73 (1936).

Bemerkungen über Kurvenkongruenzen und Berechnung einiger Invarianten bzw. invarianten Figuren (z. B. Krümmungen, Oskulationsebene) von Kurven einer Kongruenz, wenn dieselbe durch die Gleichungen $dx: P(x, y, z) = dy: Q(x, y, z) = dz: R(x, y, z)$ gegeben ist. *O. Borůvka (Brno).*

Ritter, Robert: Kehlpunktabstand und Drall von Strahlenkongruenzen, insbesondere der Normalenkongruenzen der assoziierten Minimalflächen. Jber. Deutsch. Math.-Ver. einig. 46, Abt. 1, 71—92 (1936).

Die Punkte und Strahlen eines Strahlensystemes S werden gegeben durch $\gamma = r + \sigma a$, dabei ist r der Ortsvektor einer beliebigen Leitfläche und a Einheitsvektor. Verf. folgt den Entwicklungen von J. Dubnow (vgl. dies. Zbl. 7, 327) und verwendet den Grundtensor $g_{ik} = a_i a_k$, außerdem den Kummerschen Tensor $c_{ik} = a_i t_k$ und den Sanniaschen $b_{ik} = |a_i a_j t_k|$, die in einfacher Weise miteinander zusammenhängen. —

Der Abstand z des Kehlpoints einer Regelfläche des Systems vom zugehörigen Punkt der Leitfläche und der Drall d der Regelfläche genügen den Gleichungen

$$z = -\frac{c_{ik} du^i du^k}{g_{ik} du^i du^k}; \quad d = \frac{b_{ik} du^i du^k}{g_{ik} du^i du^k}.$$

Hier zeigt sich eine Parallelität der Prozesse, deren Untersuchung das Ziel der vorliegenden Arbeit ist. Ist (S, r) ein Strahlensystem mit Leitfläche mit den Tensoren g_{ik} , c_{ik} , b_{ik} , so gibt es ein System (S, r) , in dem die Tensoren c_{ik} und b_{ik} miteinander vertauscht sind (abgesehen vom Vorzeichen). Der einfachste Fall dieser Vertauschung führt zu den Normalensystemen adjungierter Minimalflächen. — Ferner werden zahlreiche bekannte Sätze über Drall und Kehlpointsabstand der Regelflächen eines Strahlensystemes auf Grund jener Parallelität einander gegenüber gestellt, z. B. die Formeln von Hamilton und Mannheim.

W. Haack (Berlin).

Anglade, E.: Sur les surfaces flecnodales d'une surface réglée. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 22, 498—504 (1936).

L'auteur examine les surfaces flecnodales d'une surface réglée S en la rapportant à un tétraèdre dont les sommets sont sur la quadrique osculatrice de S , ainsi que par son image en espace linéaire à cinq dimensions, il ne donne pas des résultats nouveaux.

S. Finikoff (Moscou).

Vincensini, P.: Étude des congruences de sphères dont les deux nappes de l'enveloppe se correspondent avec équivalence ou applicabilité et problèmes de déformation associés. Ann. École norm., III. s. 53, 41—82 (1936).

L'auteur considère une congruence de ∞^2 sphères Σ dont les deux nappes d'enveloppe (M) et (M') se correspondent par aires équivalentes. Il est à distinguer la correspondance directe (1°) ou inverse (2°) de (M) , (M') suivant que les points homologues décrivent sur (M) , (M') des contours fermés tournant dans le même sens ou dans les sens opposés autour de la corde de contact MM' . Si ϱ_1 , ϱ_2 sont les distances des deux foyers de MM' du point J où MM' perse le plan tangent de la déferente (= lieu des centres de Σ), les deux cas en question sont caractérisés par l'équation (1°) $\varrho_1 + \varrho_2 = 0$ ou (2°) $\varrho_1 \varrho_2 = -JM^2$. La seconde équation est conservée au cours d'une déformation arbitraire de la déferente. Si le rayon de Σ est constant, la déferente est une surface à courbure totale constante négative (1°) ou une surface minima arbitraire (2°). En imposant la condition que la correspondance de (M) , (M') est conforme, l'auteur démontre que la solution de M. Lebel [J. de Math. 15 (1936); ce Zbl. 13, 279] du problème de l'applicabilité de (M) , (M') est la solution générale. Étude des congruences (Σ) dont la déferente est développable ou à courbure totale constante ou minima. En revenant au cas général l'auteur démontre les relations caractéristiques: $\frac{H-H'}{K-K'} = R$ (1°), $R^2(K+K') - R(H+H') + 2 = 0$ (2°) où K , K' et H , H' sont les courbures totales et moyennes de (M) , (M') et R est le rayon de Σ . S. Finikoff.

Haack, Wolfgang: Differentialgeometrie der Strahlenkomplexe. III. Über die Regelflächen eines Komplexes. Mh. Math. Phys. 44, 27—40 (1936).

En pour suivant l'étude des complexes de droites K (ce Zbl. 1, 31) l'auteur examine les surfaces réglées $R(\mathfrak{A}, d\mathfrak{A})$ de K qui passent par deux rayons \mathfrak{A} et $\mathfrak{A} + d\mathfrak{A}$ de K . Une surface R donnée, il appelle point de courbure \mathfrak{z} de R le point d'intersection de certain rayon de la demiquadrique \mathfrak{G} de R (= l'ensemble des droites qui coupent trois rayons infiniment voisins de R) avec le plan qui passe par la normale de R et par la tangente de sa ligne de striction. Cela posé, le lieu de \mathfrak{z} de ∞^2 surfaces $R(\mathfrak{A}, d\mathfrak{A})$ est une surface réglée du 3^{me} ordre qui a \mathfrak{A} comme droite singulière double. Les demi-quadratiques \mathfrak{G} de $R(\mathfrak{A}, d\mathfrak{A})$ forment un complexe linéaire osculateur de K . Les directions $d\mathfrak{A}$ dont les \mathfrak{G} appartiennent à un même complexe, sont déterminées par une forme quadratique. Le discriminant de la forme s'annule pour les trois directions principales de Klein. Toutes ces relations sont illustrées par une image sur un plan qui joue le rôle de l'indicatrice de Dupin.

S. Finikoff (Moscou).

Haack, Wolfgang: Differentialgeometrie der Strahlenkomplexe. IV. Über Minimal-komplexe. *Math. Z.* **41**, 252—260 (1936).

Soit $\bar{g}_{ik} du^i du^k$ la forme quadratique fondamentale d'un complexe K (ce *Zbl.* **12**, 314); le complexe K est minimum si $J = \int \int \int \sqrt{|\bar{g}_{ik}|} du^1 du^2 du^3$ prend la valeur extremum. Pour calculer la variation de J l'auteur donne à chaque rayon \mathfrak{U} de K un déplacement infinitesimal petit normal au sens de Koenigs à tous les déplacements de K . Il obtient une équation caractéristique entre les invariants de K et leurs premières dérivées (à dérivées partielles du second ordre par rapport aux coordonnées de \mathfrak{U}); elle prend la forme $\text{ctg} \vartheta_1 + \text{ctg} \vartheta_2 + \text{ctg} \vartheta_3 = 0$ où ϑ_i sont les angles de \mathfrak{U} avec les axes de trois complexes linéaires principaux H_i (= tangents en \mathfrak{U} à K et dont le contact avec une surface réglée convenablement choisie de K s'augmente jusqu'à 3^{me} ordre). Il existe un seul complexe linéaire C (central) tangent à K dont l'axe coupe \mathfrak{U} et coïncide avec la normale principale \S de K . Si la demiquadrique dont les rayons coupent les 3 axes de H_i appartient à C , le complexe K est minimum. (II. vgl. dies. *Zbl.* **13**, 127.) *S. Finikoff* (Moscou).

Rozet, Octave: Recherches sur la géométrie projective réglée différentielle. *Mém. Soc. Roy. Sci. Liège*, III. s. **20**, fasc. 3, 1—95 (1935).

Il est bien connu que la congruence W peut être représentée sur l'hyperquadrique Q_y de Klein en espace linéaire S_5 comme une surface (J) ayant un réseau qui correspond aux asymptotiques des nappes focales. L'auteur considère une congruence (j) non W et montre que la surface (J) en question possède deux systèmes conjugués de seconde espèce en involution de M. Segre [*Ann. École norm.* **44**, 153—213 (1927)]; les plans osculateurs aux lignes u en points d'une même ligne v sont tangents à une même courbe] qui correspondent aux asymptotiques des deux nappes focales de (j). Cinq directions principales de (J) (le lieu des S_3 osculateurs aux courbes dont la tangente possède une direction principale, est un S_4 bitangent à (J)) correspondent à cinq systèmes ∞' de surfaces réglées Ω de (j). Certains cas particuliers. La deuxième partie est consacrée à l'étude des variétés V_3 appartenant à une espace linéaire S_5 et dont le point générateur G décrit un système point de Guichard (une variable indépendante restant fixe, G décrit un réseau). Les variétés (G) possèdent quatre familles d'asymptotiques qui correspondent à quatre foyers inflexionnels du rayon duc omplexe (g) dont (G) est l'image, et trois systèmes de lignes principales qui déterminent précisément le système point de (G) et dont l'image est les trois congruences W de (g). *S. Finikoff*.

Ermolaev, L.: Étude d'une correspondance entre courbes et surfaces. *C. R. Acad. Sci.*, Paris **202**, 1640—1641 (1936).

I. La correspondance en question fait correspondre à chaque point M d'une surface S un point N d'une courbe Γ et à chaque point N de Γ ∞' points de S [qui forment sur S une courbe (p)] et tels que MN et M_1M_2 (= la droite d'intersection du plan tangent t à S en M et du plan osculateur τ à Γ en N) soient conjugués par rapport à la quadrique de Lie du point M de S . Soit A le point où la tangente NA de Γ coupe t , (γ) la courbe enveloppée sur S par la droite MA . Si (p) et (γ) sont conjuguées, Γ est plane. Si elles coïncident, ce sont des droites et S est réglée. — II. Si Γ est une droite NA , l'auteur prend le plan τ arbitrairement à seule condition qu'il contienne $NA = \Gamma$. À ∞^1 plans τ du faisceau NA une famille des courbes (t) correspond sur S . Les familles (p) et (t) sont conjuguées si Γ est tangente à la quadrique de Lie de S ou si (t) et (γ) coïncident. Si (γ) sont asymptotiques de S , ce sont des droites rencontrant Γ . Si MN , M_1M_2 sont les directrices de Wilczynski, les asymptotiques de S appartiennent chacune à un complexe linéaire et S est une surface R particulière. *S. Finikoff*.

Finikoff, Serge: Sur quelques réseaux conjugués. *C. R. Acad. Sci.*, Paris **202**, 1734 bis 1736 (1936).

L'A. remarque que les réseaux récemment obtenus par Pantazi [*C. R. Acad. Sci.*, Paris **202**, 550 (1936)]; ce *Zbl.* **13**, 180] coïncident avec les réseaux déjà introduits

par Slotnick [Amer. J. Math. **53**, 143 (1931); ce Zbl. **1**, 32], définis par l'égalité des invariants tangentiels avec les invariants ponctuels homonymes, et considère en même temps les réseaux harmoniques de Wilczynski, c'est-à-dire les réseaux tels que les rayons homologues des ultérieures transformées de Laplace des congruences engendrées par ses tangentes se coupent. Il donne nombre de propriétés concernant les réseaux susdits; p. ex.: si deux réseaux consécutifs d'une suite de Laplace sont de l'un ou de l'autre des deux types envisagés, tous le sont. *B. Segre.*

Elimoff, N.: Sur quelques réseaux conjugués et sur les invariants qui s'y trouvent liés. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **4**, 3—6 (1935).

Let $ds^2 = g_{\alpha\beta} du^\alpha dw^\beta$, $\vartheta = b_{\alpha\beta} du^\alpha dw^\beta$ ($\alpha, \beta = 1, 2$) be the first and second fundamental forms of a surface. $\varphi_{\alpha\beta} du^\alpha dw^\beta = 0$ $\varphi_{11}\varphi_{22} - \varphi_{12}^2 \neq 0$ defines a net on the surface. The author obtains the conditions for a surface of translation and shows that the vanishing of the vector $\varphi_i = \tilde{\varphi}^{\alpha\beta}(\varphi_{i\alpha|\beta} - \frac{1}{2}\varphi_{\alpha|\beta i})$ is necessary and sufficient for a Tchebychev net. — It is also shown that in order that a net be that of Voss or Tchebychev a scalar invariant of the net must satisfy a Riccati equation.

M. S. Knebelman (Princeton).

Dubnov, J.: Contributions à la géométrie différentielle des réseaux (théorèmes de réduction, réseaux géodésiques). C. R. Acad. Sci. USSR, N. s. **4**, 7—11 (1935).

Let $\varphi_{\alpha\beta} du^\alpha dw^\beta = 0$ be a net on a surface (cf. the prec. rev.). Since the tensor $\varphi_{\alpha\beta}$ is only determined to within a scalar multiplier, the author introduces the reduced

tensor $\tilde{\varphi}_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{-\kappa}} \varphi_{\alpha\beta}$. He then shows that the Tchebychev vector is $\tau_i = \tilde{\varphi}_{\alpha\beta} \tilde{\varphi}_{i\alpha|\beta}$ and $\tilde{H} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \tilde{\varphi}_{\alpha\beta} = \pm \cot \omega$, where ω is the angle between the curves of the net. — It is then shown that the conditions for the different types of nets on a surface are expressible in terms of κ , φ , ω and τ and their successive covariant derivatives with respect to the fundamental tensor $g_{\alpha\beta}$.

M. S. Knebelman (Princeton).

Yano, Kentaro, and Yosio Mufô: Notes on the deviation of geodesics and the fundamental scalar in a Riemannian space. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. **18**, 142—152 (1936).

Von einem beliebigen Punkte x^r einer V_n denkt man sich eine einfach unendliche Schar der Geodätischen, welche eine V_2 einspannen. In dieser V_2 ist $t = \text{konst.}$ die Gleichung einer Geodätischen (durch x^r), deren Bogen $S[x(s, t)] = \int_0^x \sqrt{g_{\lambda\mu} dx^\lambda dx^\mu}$ ist. Setzt man $F = \frac{1}{2} S^2$, so ist in x^r $F_\mu = F_{\mu\lambda\nu} = 0$, $F_{\mu\lambda} = g_{\mu\lambda}$, $F_{\omega\mu\lambda\nu} = \frac{1}{3} (K_{\mu\lambda\omega\nu} - K_{\lambda\omega\mu\nu})$.

Der Beweis verläuft analog zu dem Beweise für die bekannte Auswertung von $g_{\lambda\mu}$ und seiner Ableitungen in Normalkoordinaten. — Soll V_n von konstanter Krümmung sein, dazu ist n. u. h., daß $\frac{\delta}{\delta s} i^\nu = 0$ längs jeder der betrachteten Geodätischen. Dabei ist i^ν der zu $\frac{\partial x^\nu}{\partial t}$ gehörige Einheitsvektor und δ Symbol der kovarianten Differentiation.

Hlavatý (Praha).

Dirac, P. A. M.: Wave equations in conformal space. Ann. of Math., II. s. **37**, 429—442 (1936).

In einem gewöhnlichen 5-dimensionalen projektiven Raum P_5 mit homogenen Koordinaten x^κ ($\kappa = 1, \dots, 6$) sei eine quadratische Hyperfläche $X_4(g_{\lambda\kappa} x^\lambda x^\kappa = \sum (x^\lambda)^2 = 0)$ gegeben. In dieser X_4 , die als Raum-Zeit-Welt aufgefaßt wird, herrscht eine konforme Geometrie. Es wird ein bestimmter Punkt der X_4 (das Unendliche) ausgezeichnet. Zu jedem auf X_4 gegebenen projektiven Vektor gehören dann zwei affine Skalare und ein affiner Vektor. Verf. führt ein projektives Vektorpotential φ_λ vom Grade -1 ein. Dieses φ_λ soll den Gleichungen $g^{\mu\lambda} \partial_\mu \varphi_\lambda = 0$, $x^\lambda \varphi_\lambda = 0$ genügen. Das elektromagnetische Feld ist $F_{\lambda\kappa} = 2 \partial_{[\lambda} \varphi_{\kappa]}$. Die Maxwell'schen Gleichungen sind dann $\partial_{[\mu} F_{\lambda\kappa]} = 0$ und $\partial_\lambda F^{\lambda\kappa} = s^\kappa$. Wegen der Unabhängigkeit von s^κ von der Fort-

setzung von φ_λ über P_5 sind diese Gleichungen konforminvariant (vgl. E. Cunningham und H. Bateman, Proc. London Math. Soc. 1910; J. A. Schouten und J. Haantjes, dies. Zbl. 9, 334). — Es seien β_λ und γ_λ nichtkommutative Größen, für die $\beta_{(\lambda}\gamma_{\kappa)} = g_{\lambda\kappa}$ ist. Der einfachste Differentialoperator, der von der Fortsetzung der Funktionen über P_5 unabhängig ist, ist $x_{[\lambda}\partial_{\kappa]}$. Mithin wird für die „Diracschen“ Gleichungen angesetzt $\beta^\lambda\gamma^\mu x_{[\lambda}\partial_{\mu]}\psi = m\psi$. Das korrespondierende affine Gleichungssystem ist dann aber degeneriert. Es scheint im konformeuklidischen Falle also unmöglich, einen einfachen Ansatz für die Wellengleichungen zu finden. J. Haantjes.

Topologie:

Komatu, Atuo: Über die dreidimensionalen nichtorientierbaren Mannigfaltigkeiten. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 18, 135—141 (1936).

Eine geschlossene nichtorientierbare Fläche läßt sich bekanntlich aus einer orientierbaren Fläche und ein oder zwei Möbiusbändern aufbauen. Es wird die Frage untersucht, ob sich auch die mehrdimensionalen nichtorientierbaren Mannigfaltigkeiten aus einfacheren Bausteinen zusammensetzen lassen. In drei Dimensionen lautet die Antwort so: In dem topologischen Produkt aus einer Strecke und einer orientierbaren geschlossenen Fläche von ungeradem Geschlecht $2g - 1$ werde die eine Randfläche fixpunktfrei und mit Erhaltung der Orientierung auf sich abgebildet. Durch Identifizieren zugeordneter Punkte erhält man eine durch die Zahl g eindeutig bestimmte nichtorientierbare Mannigfaltigkeit M_g^3 , die von einer orientierbaren Fläche vom Geschlecht $2g - 1$ berandet wird. Identifiziert man diese Randfläche mit der homöomorphen Randfläche einer beliebigen orientierbaren 3-dimensionalen Mannigfaltigkeit, so ergibt sich die allgemeinste geschlossene nichtorientierbare Mannigfaltigkeit. Seifert (Dresden).

Aronszajn, Natan: Sur Phomotopie n -dimensionnelle. C. R. Acad. Sci., Paris 202, 1643—1645 (1936).

Mit Hilfe der in der vorangehenden Note [C. R. Acad. Sci., Paris 202, 1475—1478 (1936); dies. Zbl. 14, 41] eingeführten Quasigruppen werden in n -dimensionalen Polyedern Gruppen erklärt, die die Homotopiegruppen von Hurewicz und die Bettischen Gruppen als Spezialfälle enthalten. H. Seifert (Dresden).

Jacobson, N.: Totally disconnected locally compact rings. Amer. J. Math. 58, 433—449 (1936).

D. van Dantzig (Studien over topologische Algebra, Diss. Amsterdam 1931) has determined the structure of all locally compact separable (l. c. s.) commutative and associative fields. The author succeeds in generalising van Dantzig's method in order to investigate general l. c. s. (not necessarily commutative or associative) rings. Previously [N. Jacobson and O. Taussky, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 21 (1935)] the structure of connected rings was determined. These results were obtained by considering rings as abelian groups under addition and by investigating to what extent the ring assumption restricts the structure of the group. The same method is applied here to totally disconnected (t. d.) rings. For this purpose the structure of l. c. s. t. d. abelian groups is discussed and some previous results of Alexander and Cohen and van Dantzig are proved again, especially the theorem of Alexander and Cohen [Ann. of Math. 33, 538—566 (1932)]: A compact t. d. group \mathfrak{G} is the direct sum of p -groups, where a group \mathfrak{S} is called a p -group if $p^\mu a \rightarrow 0$ for every $a \in \mathfrak{S}$. For this theorem it is proved that \mathfrak{G} is the direct sum of $\mathfrak{G}^{(p)} = \mathfrak{G} \cap p\mathfrak{G} \cap p^2\mathfrak{G} \cap \dots$ and of \mathfrak{G}_p , where \mathfrak{G}_p is the group formed by the elements g for which $\{p^\mu g\}$ has 0 for limit point. There exist primes p such that $\mathfrak{G}_p \neq 0$. By the last 2 lemmas applied to the additive group of a simple ring \mathfrak{S} it is proved that \mathfrak{S} is a p -group where p is uniquely determined. Then 2 cases have to be distinguished: (1) Characteristic of $\mathfrak{S} = p$. In this case the additive group is the direct sum of cyclic groups of order p . (2) Characteristic of $\mathfrak{S} = 0$. In this case the elements of \mathfrak{S} can be valued by means of a compact and open subgroup \mathfrak{G}

of the additive group in the following way: It holds $\mathfrak{G} > p\mathfrak{G} > p^2\mathfrak{G} > \dots$, $\mathfrak{G} \cap p\mathfrak{G} \cap p^2\mathfrak{G} \cap \dots = 0$, $\mathfrak{G} < p^{-1}\mathfrak{G} < p^{-2}\mathfrak{G} < \dots$, $\mathfrak{G} \cup p^{-1}\mathfrak{G} \cup p^{-2}\mathfrak{G} \cup \dots = \mathfrak{S}$. The valuation $\|a\| = p^{-\mu}$, if $a \in p^\mu\mathfrak{G}$, but not $\in p^{\mu+1}\mathfrak{G}$ ($\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), gives the topology of \mathfrak{S} , if we define $\text{dist}(a, b) = \|a - b\|$. From this it is proved: \mathfrak{S} is a hypercomplex system over the field of p -adic numbers. The theory of associative hypercomplex systems over the field of p -adic numbers is well known through the results of Hasse [Math. Ann. **104**, 495—534 (1931)]. However as there is no well-developed theory which applies to rings of characteristic p , the author develops a method which covers both char. 0 and p . For this purpose it is further assumed that \mathfrak{S} is a field \mathfrak{F} . It is proved that \mathfrak{F} can be valuated and further — again by the method of Hasse — that it is a cyclic algebra over its centrum. Hence \mathfrak{F} comes under the theory of commutative valuated fields which has been investigated by Hasse and F. K. Schmidt [J. reine angew. Math. **170** (1933), recently O. Teichmüller gave an outline of a new foundation of this theory, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen **1**, N. F. 1, 151 (1936)]. The valuation is obtained by means of a unique maximal compact open domain of integrity \mathfrak{R} in \mathfrak{F} . \mathfrak{R} can be defined topologically as consisting of all elements a such that $\{a^n\}$ has no divergent subsequence. (See this Zbl. **1**, 198; **5**, 28; **8**, 52; **11**, 8; **13**, 293.) Taurusky (Cambridge).

Markov, A.: Quelques théorèmes sur les ensembles abéliens. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **1**, 311—313 (1936).

Sei Γ eine Schar von Abbildungen φ einer Menge E auf sich selbst. Γ ist abelsch, falls $\varphi\psi x = \psi\varphi x$ für $x \in E$, $\varphi \in \Gamma$, $\psi \in \Gamma$. Im Satze I handelt es sich um stetige Abbildungen φ einer bikompakten und konvexen Menge B aus einem linearen, lokal-konvexen, topologischen Raume. φ wird affin genannt, falls $\varphi(\lambda x + \mu y) = \lambda\varphi x + \mu\varphi y$ für $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$, $\lambda + \mu = 1$, $x \in B$, $y \in B$. Eine abelsche Gesamtheit von affinen Transformationen des B auf B besitzt immer einen gemeinsamen Fixpunkt (Satz I), was sich aus dem Fixpunktsatz für konvexe Menge ergibt (für die Übertragung des Fixpunktsatzes auf die im Satz I behandelten Räume vgl. Tychonoff, dies. Zbl. **12**, 308). Satz II: Sei Γ eine abelsche Gesamtheit von Transformationen φ einer Menge E auf E . Es gibt ein reelles additives, „positives“ Funktional $M(f)$ — für alle beschränkte, reelle Funktionen $f(x)$ ($x \in E$) definiert — mit $M(f\varphi) = M(f)$, $M(1) = 1$. Im Satz III wird die Existenz einer Art des äußeren Maßes $\mu(A)$ für alle Untermengen A eines normalen topologischen Raumes E bewiesen (die Positivwertigkeit von μ wird nicht postuliert), das in bezug auf eine gegebene abelsche Gesamtheit Γ von stetigen Transformationen von E auf E folgende Eigenschaft besitzt: $\mu(\varphi^{-1}G) \geq \varphi(G)$ für offenes G und $\varphi \in \Gamma$. Als Folgerung bekommt man nach einigen weiteren Bemerkungen ein früheres — die Existenz von gegenüber stationären Strömungen (in kompakten Räumen) invarianter Maße betreffendes — Ergebnis von N. Bogoliouboff und N. Kryloff (dies. Zbl. **12**, 346 und **13**, 183). Schauder (Lwów).

Mechanik.

Levi-Civita, T.: Sur une transformation de la fonction lagrangienne qui n'altère pas les trajectoires. Rec. math. Moscou, N. s. **1**, 123—124 (1936).

It is shown that, given a dynamical problem with a Lagrangian function L , if we write $L' = f(L)$ and $dt' = dt \frac{df}{dL}$, then the system of equations formed with L' as Lagrangian function and t' as time has the same trajectories as the original Lagrangian system. Whittaker (Edinburgh).

Šapošnikov, I.: The Dirac vector model for two nonequivalent electrons in the atom. Ž. eksper. teoret. Fis. **6**, 304—313 (1936) [Russisch].

Im Anschluß an eine Arbeit von M. Markov (dies. Zbl. **12**, 235) wird die Störungsenergie erster Näherung für zwei nicht notwendig äquivalente Elektronen (d. h. für solche mit evtl. verschiedenen Quantenzahlen $n_1 l_1$ und $n_2 l_2$) betrachtet. Die endliche

Matrix W , deren Eigenwertgleichung mit der Säkulargleichung des Störungsproblems identisch ist, kann, wie Verf. zeigt, in der folgenden Form dargestellt werden:

$$W = f_1(\theta) - \frac{1}{2}[1 + (\sigma_1 \cdot \sigma_2)] f_2(\theta).$$

Hier bezeichnet $\theta = (\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{M}_2)$ das skalare Produkt der Drehimpulse und $(\sigma_1 \cdot \sigma_2)$ dasjenige der Spinvektoren beider Elektronen; $f_1(\theta)$ und $f_2(\theta)$ sind Polynome in θ , deren Koeffizienten lineare Funktionen der Slaterschen Integrale über radiale Funktionen sind. Als Beispiel werden vom Verf. die Fälle $l_1 = l_2 = 1$ und $l_1 = 1, l_2 = 2$ durchgerechnet.

V. Fock (Leningrad).

Moissejev, N.: Über den unwesentlichen Charakter einer der Beschränkungen, welche den topographischen Systemen in der Liapunoffschen Stabilitätstheorie auferlegt werden. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 1, 165—166 (1936).

In the work of Liapunoff [Ann. Toulouse 9, 257 et seq. (1907)] on the stability of the solutions of the system $\dot{x}_s = X_s, s = 1, \dots, n$, a function $V(x_1, \dots, x_n, t)$, where $\dot{V} = \sum_1^n V_{x_s} X_s + V_t$, plays an important rôle. The author states that the usual assumption that \dot{V} be continuous is unnecessarily restrictive. The theorems using this method retain their validity if \dot{V} is of constant sign and $\int_{t_0}^t V dt$ is R -integrable.

Hence the discontinuities of \dot{V} can form a set of measure zero. G. A. Hedlund.

Moissejev, N.: Über die Wahrscheinlichkeit der Stabilität nach Liapunoff. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 1, 215—217 (1936).

The motions which pass near a point, P , of equilibrium of a dynamical system (system of ordinary first order differential equations) are classified into S (stable)-motions and J (unstable)-motions. If M denotes a sphere of radius r with P as center, SM the points of M which give rise to stable motions, the probability of stability of P is defined as $\lim_{t \rightarrow 0} m(SM)/m(M)$, assuming that the limit exists. This is a generalization of stability in the sense of Liapunoff. The author extends the definition further by introducing a weight function \bar{F} . It seems to the reviewer that the definition of S -motion is open to criticism in that $R_2(R_1)$ being rather arbitrary, depending on the motion being discussed, all motions might be S -motions without stability at P in any proper sense.

G. A. Hedlund (Bryn Mawr).

Hopf, Eberhard: Fuchsian groups and ergodic theory. Trans. Amer. Math. Soc. 39, 299—314 (1936).

This paper gives the complete solution of the problem of metrical transitivity (the importance of which has been sufficiently emphasized) of the flow defined by the geodesics on two-dimensional Riemannian manifolds of constant negative curvature, of finite connectivity and complete in the sense that any geodesic can be continued to infinite length. If Σ denotes such a surface, metrical transitivity holds if Σ has finite area. If Σ has infinite area, almost all the geodesics are unstable in the sense that given any bounded region of Σ , any such geodesic eventually remains outside this region. — The simply connected universal covering surface of Σ can be mapped isometrically into the hyperbolic plane consisting of the interior, Ψ , of $U, |z| = 1$, with the metric $ds = 2(l - \bar{z}z)^{-1} |dz|$. If Σ is orientable the covering transformations define a Fuchsian group Γ with U as principal circle, whereas Γ will contain anti-analytic transformations if Σ is non-orientable. The reviewer showed (this Zbl. 10, 221; 12, 203) that metrical transitivity held (1), if the fundamental region of Γ had restrictive symmetry properties (only one orientable case of each genus > 1) and (2), considering the upper half-plane instead of Ψ , if the group was the modular group. The methods used by the author are entirely different and much more elegant. They involve potential theory, — the Poisson integral, Fatou's theorem and a generalization of it, Harnack's inequalities. First (as has been done previously) the problem is reduced to a two-

dimensional problem on the torus $U \times U$. The problem is then thrown over to potential theory by showing that it is solved if it can be shown that a real non-negative function $U(z, w)$, harmonic in $|z| < 1$ and $|w| < 1$, must vanish identically if its boundary values, which are the values on a torus, vanish on a set of positive measure. It should be noted that Seidel (this Zbl. 12, 155) has used some of these tools in studying the much simpler problem of the metrical transitivity on U . G. A. Hedlund.

Siegel, Carl Ludwig: Über die algebraischen Integrale des restringierten Dreikörperproblems. Trans. Amer. Math. Soc. 39, 225—233 (1936).

Der Verf. beweist auf eine recht elegante Weise, daß das restringierte Dreikörperproblem bei keinem festen Werte des positiven Massenprozentsatzes μ (< 1) ein algebraisches erstes Integral besitzt, das keine algebraische Konsequenz des Jacobischen Integrals ist. Der Satz ist analog zu einem der Brunsschen Sätze über das nicht-restringierte Problem und kreuzt sich mit den Poincaréschen Ergebnissen, da μ nicht als variabel vorausgesetzt wird. Wintner (Baltimore).

Birkhoff, George D.: Sur le problème restreint des trois corps. II. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 5, 9—50 (1936).

Die Arbeit bringt die Fortsetzung und den Abschluß der in dies. Zbl. 12, 128 besprochenen Untersuchungen. Verf. hat in § 20 seiner in Rend. Circ. math. Palermo 39 (1915) erschienenen Arbeit jeder aus einer massennahen ungestörten ($\mu = 0$) elliptischen Bewegung durch Störung ($\mu > 0$) erhaltenen symmetrischen periodischen Lösung zwei ganze Zahlen k, l zugeordnet, die unabhängig von dem Massenprozentsatz μ sind und im ungestörten Grenzfall die Anzahl der orientierten Umläufe der mit der (x, y) -Ebene rotierenden Ellipse bzw. die Anzahl der vollen Drehungen dieser rotierenden Ebene während einer Periode darstellen. Für die a. a. O. (§ 20) sichergestellten periodischen Lösungen wird jetzt eine elegante Klassifikationstheorie aufgebaut, indem die Existenz bzw. Nichtexistenz von periodischen Lösungen mit vorgeschriebenem größten gemeinsamen Teiler (k, l) innerhalb der vier a. a. O. (§ 20) definierten Kategorien untersucht wird. Die Betrachtungen hängen mit den Indizes der die gesuchten Lösungen darstellenden Fixpunkte aufs engste zusammen, lassen die Rolle der Rotationszahlen der beiden durch Störung von Kreisen erhaltenen iso-energetischen Grenzlösungen geometrisch in Evidenz treten und können, was das restringierte Problem anbelangt, als ein Abschluß der mit dem sog. letzten Poincaréschen Satz zusammenhängenden Problematik betrachtet werden. Es werden sodann einerseits die „homoclinic“ Methode [vgl. etwa Acta math. 50 (1927); J. de Math. 7 (1928)] und andererseits ein anderweitiger Satz des Verf. [Atti del Congr. Bologna 6 (1928)] zur Gewinnung eines überraschenden neuen Typs von periodischen Lösungen angewandt, die den Poincaréschen Störungsmethoden prinzipiell nicht zugänglich sind (zuma μ nicht klein zu sein braucht) und die u. a. zu asymmetrischen periodischen Lösungen führen. Die Resultate dieses und der folgenden Paragraphen sind nicht an das restringierte Problem gebunden, gelten vielmehr für eine große Klasse von Problemen mit zwei Freiheitsgraden, in der das restringierte Problem sehr wahrscheinlich enthalten ist. — Die periodischen Lösungen verlassend, wird zunächst eine ausgedehnte Klasse von Folgen von natürlichen Zahlen konstruiert, die im Sinne des Verf. [Acta math. 43 (1920)] rekurrent sind und sich von den bei geodätischen Linien von Flächen konstanter negativer Krümmung üblichen Folgen von Morse dadurch unterscheiden, daß sie sehr einfach auf eine diophantische Weise definiert sind. Es werden sodann auf Grund einer vom Verf. in seiner Vatikaner Preisschrift [Mem. Pontif. Nuovi Lincei (3) 1 (1934)] weit entwickelten Methode Kriterien hergeleitet dafür, wann eine (reversible oder irreversible) Folge von natürlichen Zahlen beim Existenzbeweis von entsprechenden (vor allem symmetrischen) rekurrenten Lösungen der Bewegungsgleichungen verwendet werden kann. Es ergeben sich auch verschiedene, recht vollständige Resultate über die topologische Struktur oder die Verteilung der Mannigfaltigkeit von gewissen periodischen sowie rekurrenten Bewegungen im Phasenraum,

insbesondere bezüglich derjenigen Mannigfaltigkeiten, die in der erwähnten Preisschrift mit Σ und Σ_Q bezeichnet sind. Der a. a. O. eingeführte fundamentale Begriff der „Signatur“ wird mit Hinsicht auf das restringierte Problem besprochen und für ihre Struktur in diesem Fall eine Symmetrieeigenschaft nachgewiesen. Die Fülle der Resultate kann hier nicht wiedergegeben werden. — Der letzte Teil der Arbeit enthält u. a. prinzipielle Betrachtungen über die Rolle des Ergodensatzes, über die relative Tragweite der Methoden der Variationsrechnung und der Methode der kritischen Punkte beim Existenzbeweis von periodischen Lösungen sowie eine kurze Behandlung des Strömungsgrenzen Abschlußprinzips, die von der vom Ref. (dies. Zbl. 3, 133) gegebenen sich darin unterscheidet, daß von der Existenz von lokalen Schnittflächen (surfaces of section) Gebrauch gemacht wird. Es wird endlich ausgeführt, wie die Nichtexistenz von nichtlokalen Schnittflächen mit Rücksicht auf ein vom Verf. in seiner genannten Preisschrift gegebenes Kriterium durch numerische Rechnungen der Kopenhagener Art sehr wohl entschieden werden kann. *Wintner* (Baltimore).

Sokoloff, George: Sur le choc dans le problème de trois corps qui s'attirent proportionnellement à leurs masses et à une fonction de la distance. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 22, 295—305 (1936).

Verf. untersucht das Dreikörperproblem im Falle, wenn die Anziehungskräfte nicht newtonianisch, sondern gewisse Funktionen der relativen Entfernungen r_{ij} sind: $f_{ij} = G^2 m_i m_j f(r_{ij})$; G^2 Gravitationskonstante, m_i, m_j Punktmassen, $f(r) = -\frac{\partial F}{\partial r}$ holomorph in r für alle positiven r -Werte, die den Bedingungen:

$$\lim_{r \rightarrow +0} r^{2\alpha+1} f(r) = 2\alpha \left[\lim_{r \rightarrow +0} r^{2\alpha} F(r) = 1, \alpha > 0 \right]$$

genügen. Für ein solches Dreikörperproblem untersucht Verf. den Fall einfacher Zusammenstöße (beim Zusammenstoß nehmen nur zwei Körper teil) und stellt ein verschiedenes Verhalten der zusammenstoßenden Punkte in Abhängigkeit von der Konstante α fest. Die vom Verf. erhaltenen Resultate sind als Verallgemeinerung einiger ebenfalls vom Verf. erhaltenen Resultate für das klassische Dreikörperproblem zu betrachten. Die hier referierte Arbeit ist eine Fortsetzung einer analogen Arbeit, welche Zusammenstößen im restringierten Dreikörperproblem gewidmet ist [J. l'Inst. Mat. l'Acad. Sci. d'Ukraine No 3—4 (1935); dies. Zbl. 12, 128]. *A. Andronoff. A. Witt.*

Moissejev, N.: Über einige anepizyklische Bereiche im asteroidischen Dreikörperproblem. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 1, 107—108 (1936).

The author extends his earlier results on the existence of anepicyclic regions in the restricted problem of three bodies (see this Zbl. 13, 326) to the elliptic restricted problem. The equations of Nechwil are used (C. R. 182, 310 (1926)]. *D. C. Lewis.*

Numerov, B. V., and V. S. Moshkova: General perturbations in polar coordinates in the case of the disturbing effect of inner planets. Russ. astron. J. 13, 156—189 u. engl. Zusammenfassung 189 (1936) [Russisch].

Bei Untersuchung der gestörten Bewegungen kleiner Planeten (Asteroiden) muß die störende Wirkung der inneren Planeten (Merkur, Venus, Erde, Mars) mitberücksichtigt werden. Gewöhnlich bezieht man die Störungen auf das heliozentrische Koordinatensystem. Obgleich die Masse der inneren Planeten klein gegen diejenige des Jupiters ist, kann ihre störende Wirkung von merkwürdiger Größe sein und für den Merkur diejenige des Jupiters überwiegen. Wegen den raschen Änderungen der Merkurkoordinaten ändert sich die störende Kraft ebenfalls rasch nach Größe und Zeichen; dadurch wird die störende Wirkung des Merkurs ausgeglichen. Dieser Umstand aber macht die Berechnung der Störungskoordinaten sehr kompliziert. In der zu referierenden Arbeit wird diese Schwierigkeit durch Einführung des barozentrischen statt des heliozentrischen Koordinatensystems überwunden. (Das barozentrische Koordinatensystem bezieht sich auf das gemeinsame Gravitationszentrum der Sonne und der störenden inneren Planeten.) In einem solchen barozentrischen Bezugssystem, das

schon mehrfach in der Himmelsmechanik benutzt wurde (z. B. bei der Berechnung der Störungen der Kometen), sind die Störungskräfte der inneren Planeten klein und ändern sich langsamer. Verf. stellt neue angenäherte Formeln zur Berechnung der Störungskräfte der inneren Planeten und gibt eine allgemeine Theorie zur Berechnung der absoluten Störungen der Asteroiden in Abhängigkeit von der störenden Wirkung der inneren Planeten.

A. Andronoff, A. Witt (Moskau).

Gialanella, L.: *Sulle perturbazioni della eccentricità nel problema dei due corpi di masse lentamente crescenti.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 22, 529—533 (1935).

Suppose that the mass of the system varies according to the law $m = m_0 + \varepsilon \varphi(t)$, where m_0 is constant, ε is small and $\varphi(t)$ is either an increasing exponential function of the time or a polynomial with positive coefficients of degree not less than the third. Confining attention to elliptical motion, it is then shown that the first order variation of the eccentricity during a complete revolution (with respect to ε) is negative, thus putting into evidence the observed cosmological tendency toward circular orbits. If, however, φ is a linear or quadratic polynomial, the first order variation of the eccentricity is zero.

D. C. Lewis (Ithaca, N. Y., U.S.A.).

Armellini, G.: *L'eccentricità dei sistemi binari nel caso di masse variabili col tempo.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 23, 165—170 (1936).

A polynomial equation is found connecting the eccentricity and its first and second derivatives with the mass and its first and second derivatives.

D. C. Lewis.

Relativitätstheorie.

Colwell, Robert Cameron: *Concealed systems and relativity.* Philos. Mag., VII. s. 21, 976—980 (1936).

Fragen der Interpretation einiger Formeln der speziellen Relativitätstheorie.

Heckmann (Göttingen).

Engström, H. T., and Max Zorn: *The transformation of reference systems in the Page relativity.* Physic. Rev., II. s. 49, 701—702 (1936).

In the equivalent reference-systems of Leigh Page's relatively (this Zbl. 13, 234) light travels rectilinearly with constant velocity, but two equivalent systems are not necessarily Lorentz transforms of one another. In the present note the authors point out that the whole group of transformations belonging to Page's relativity consists of all transformations which leave invariant the equation $dx^2 + dy^2 + dz^2 + d\tau^2 = 0$ ($\tau = ict$), and is therefore (according to S. Lie) a 15-parameter group of conformal transformations. They further show that the assumption of constant light-velocity, together with the existence of one reference-system with straight light paths, implies the straightness of light paths in all such systems.

H. S. Ruse (Edinburgh).

Robertson, H. P.: *An interpretation of Page's „New relativity“.* Physic. Rev., II. s. 49, 755—760 (1936).

The author examines Page's "New Relativity" (this Zbl. 13, 234) in the light of his own general kinematical theory (this Zbl. 13, 39), of which, he concludes, Page's theory is a special case. This being so, Page's work is readily understandable in terms of a simple though somewhat artificial space-time of a type met with in general relativity, so that there is no real foundation for his contention that the new relativity renders Einstein's theory untenable. The author shows incidentally that the transformation derived by Page for relatively accelerated reference systems belongs to the 4-dimensional conformal group (cf. Engström and Zorn, the prec. rev.), and remarks that an electrodynamical theory based on transformations of this type has been developed by H. Bateman [Proc. London Math. Soc. 7, 70 (1908); 8, 223 (1909)] and E. Cunningham [ibid. 8, 77 (1909)].

H. S. Ruse (Edinburgh).

- Robertson, H. P.: Kinematics and world-structure. II.** *Astrophys. J.* **83**, 187—201 (1936).
- Robertson, H. P.: Kinematics and world-structure. III.** *Astrophys. J.* **83**, 257—271 (1936).

Nachdem der Verf. in einer ersten Arbeit (I) [*Astrophys. J.* **82**, 284—301 (1935); vgl. dies. Zbl. **13**, 39] aus dem kosmologischen Homogenitätspostulat Folgerungen für die Metrik der Welt gezogen hat, betrachtet er jetzt (II) die Bewegung von Probenpartikeln relativ zu den Fundamentalbeobachtern. Die Bewegungsgleichungen werden bis auf eine willkürliche Funktion zweier Variabler bestimmt. Eine explizite Gravitationstheorie ist bis dahin nicht benutzt. Als Erläuterung wird dann die Allg. Rel.Th. und eine passende Verallgemeinerung der Newtonschen Theorie herangezogen. In der nächsten Arbeit (III) werden statistisch-kinematische Betrachtungen im Rahmen der vorhergehenden Teile (I und II) angestellt, die dann wieder auf die beiden Gravitationstheorien angewendet werden. Die Milnesche kosmologische Statistik ist in den allgemeinen Ausführungen des Verf. mitenthalten. — Im übrigen muß auf die Arbeiten selbst verwiesen werden, deren allgemeine Tendenz die Verteidigung der Kosmologie der Allg. Rel.Th. ist.

Heckmann (Göttingen).

Whitrow, G. J.: World-structure and the sample principle. *Z. Astrophys.* **12**, 47—55 (1936).

Ein neuer Zugang zum hydrokinematischen System der Fundamentalpartikel in der Milneschen Kosmologie.

Heckmann (Göttingen).

Serghiesco, Stephan: Sur une théorie mécanique du corpuscule de lumière. *C. R. Acad. Sci., Paris* **202**, 1563—1565 (1936).

This note contains a demonstration, based upon the theorem of the equivalence of mass and energy, of the law of refraction for a corpuscle of light. It is written for the purpose of obtaining physical interpretations of certain known results. *H. S. Ruse*.

Serghiesco, Stéphan: Sur la formule de Fresnel dans une théorie corpusculaire de la lumière. *C. R. Acad. Sci., Paris* **202**, 1761—1762 (1936).

Making use of results obtained in an earlier note (see the prec. rev.), the author gives a simple interpretation of Fresnel's formula for the velocity of light in a moving medium.

H. S. Ruse (Edinburgh).

Hély, Jean: Sur une théorie synthétique de la gravitation et de l'électromagnétisme. *C. R. Acad. Sci., Paris* **202**, 1659—1660 (1936).

Hermann, H.: Der Lenard-Tomasehke'sche Betrag der Lichtablenkung im Schwerfeld. *Z. Physik* **100**, 667—668 (1936).

Walker, A. G.: The Boltzmann equations in general relativity. *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, II. s. **4**, 238—253 (1936).

In general space-time consider a continuous distribution of material particles and photons. If the system is specified by distribution-functions (one for material particles and one for photons) at each point of space-time, then these functions are restricted in that they must satisfy certain differential equations, the generalised Boltzmann equations. The object of the paper is to obtain these equations, on the assumption that no collisions take place. The Boltzmann equations are of the type

$$\frac{\partial \chi}{\partial x^i} p^i - \frac{\partial \chi}{\partial p^i} \Gamma_{jk}^i p^j p^k = 0$$

where the x^i are general coordinates, p^i is the momentum-vector, Γ_{jk}^i are the Christoffel symbols, and χ is the distribution-function. The author develops the theory of the energy-tensor in connexion with these results, and examines in particular the case when the metric is that of the Lemaitre universe.

Whittaker (Edinburgh).

Bronstein, M.: Quantization of gravitational waves. *Ž. eksper. teoret. Fis.* **6**, 195 bis 236 u. engl. Zusammenfassung 236 (1936) [Russisch].

Die Arbeit enthält eine konsequente (klassische und quantenmechanische) Theorie

schwacher Gravitationsfelder, d. h. solcher, die einem linearen Gleichungssystem genügen; diese können bekanntlich als Felder in einem pseudoeuklidischen Kontinuum aufgefaßt werden. Um „wirkliche“ Gravitationswellen von den „scheinbaren“ Wellen (die einem oszillierenden Koordinatensystem entsprechen) zu trennen, betrachtet Verf. als Feldkomponenten die Komponenten $B_{\mu\nu\sigma\rho}$ des Riemann-Christoffelschen Tensors und nicht etwa die Größen $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \pm \delta_{\mu\nu}$. Das Gleichungssystem für $B_{\mu\nu\sigma\rho}$ wird mit Hilfe gewisser Potentiale allgemein integriert. Die mit den Größen $h_{\mu\nu}$ verbundene Willkür (scheinbare Wellen) entspricht aber lediglich der Möglichkeit gewisser „Eichtransformationen“; daher wird im folgenden das $h_{\mu\nu}$ -Feld betrachtet. Ausgehend von der quasiinvarianten Lagrangeschen Funktion

$$L = [\alpha\alpha, \beta][\beta\gamma, \gamma] - [\alpha\beta, \gamma][\alpha\gamma, \beta] + \frac{1}{2}[\alpha\alpha, \beta][\gamma\gamma, \beta]$$

wird nach dem Muster der Quantenelektrodynamik (in der von Fermi und von Dirac, Fock und Podolsky gegebenen Form) das System der Gravitationsgleichungen gequantelt, und Vertauschungsrelationen für die $h_{\mu\nu}$ werden aufgestellt; daran schließen sich einige Betrachtungen über die Meßbarkeit der Feldgrößen an. Ferner wird die Wechselwirkung materieller Teilchen durch Vermittlung der Gravitationsquanten betrachtet, wobei als Ausgangsgleichung die von Fock gegebene Verallgemeinerung der Diracschen Gleichung für die Riemannsche Geometrie dient. Es ergibt sich das Newtonsche Gravitationsgesetz mit dem richtigen Vorzeichen (Anziehung). Als Anwendung der Theorie wird die durch Gravitationswellen ausgestrahlte Energie quantentheoretisch berechnet und mit der von Einstein abgeleiteten klassischen Formel verglichen.

V. Fock (Leningrad).

Bronstein, M.: Quantentheorie schwacher Gravitationsfelder. Physik. Z. Sowjetunion **9**, 140—157 (1936).

Kürzere Wiedergabe der voranstehend referierten Arbeit. Fock (Leningrad).

Quantentheorie.

● **Fürth, Reinhold: Einführung in die theoretische Physik.** Wien: Julius Springer 1936. XIV, 483 S. u. 128 Abb. RM. 18.—.

Das Buch gibt eine wirklich moderne und sehr klar geschriebene Übersicht des Gesamtgebietes der theoretischen Physik. Auf S. 11 sagt Verf.: „Die Statistik wird nicht als fremdes Element in die Theorie hineingetragen, sondern gehört zu ihrem wesentlichen Bestand.“ Dementsprechend berichtet bereits das 6. Kapitel über physikalische Statistik und das 10. Kapitel über Atom- (Quanten-) Mechanik. (Das Buch enthält 21 Kapitel.) Die Mechanik der Massenzentren, der starren Körper und der Kontinua, ferner Thermodynamik, Elektrodynamik, Optik und Relativitätstheorie finden eine knappe, aber alles Wesentliche erwähnende Darstellung. Die phänomenologischen Theorien werden statistisch begründet (statistische Mechanik, kinetische Theorie, Elektronentheorie, statistische Theorie der elektromagnetischen Erscheinungen in materiellen Körpern). Überall wo es wesentlich ist (Elektronentheorie, Theorie der Strahlung und der Spektren) werden Begriffe der Quantenmechanik verwendet. Leider werden diese Begriffe in mehr formal-statistischer Weise eingeführt und gedeutet: nach Verf. beschreibt die Wellengleichung nicht die Bewegung eines Einzelteilchens, sondern einer Schar gleichartiger Teilchen (S. 182). Diese Auffassung — die vielleicht aus pädagogisch-methodischen Gründen gewählt ist — läßt den physikalischen Sinn des quantenmechanischen Superpositionsprinzips nicht genügend erkennen. (Es wäre richtiger, die Wellenfunktion den Aussagen zuzuordnen, die sich auf Messungen an einem einzelnen Teilchen beziehen.) — Die schwierige Aufgabe, die sich Verf. gestellt hat, eine kurze, einheitliche und für den Anfänger durchaus zugängliche Darstellung der Theorie der wichtigsten physikalischen Erscheinungen zu geben, hat in dem vorliegenden Buch eine sehr glückliche Lösung gefunden; das Buch ist einem weiten Leserkreise durchaus zu empfehlen.

V. Fock (Leningrad).

Proca, Alexandre: Sur la théorie du positon. C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 1366 bis 1368 (1936).

Es wird versucht, die Diracsche Theorie der positiven und negativen Elektronen durch eine mit einer vektoriellen Wellenfunktion operierenden Theorie zu ersetzen. Es wird eine dementsprechende Lagrangesche Funktion aufgestellt, die zu einer stets positiven Energiedichte führt.

O. Klein (Stockholm).

Dolch, H.: Zur Theorie der leichtesten Kerne. Z. Physik 100, 401—439 (1936).

Zweck der Arbeit ist die Bestimmung der Konstanten des Kraftgesetzes zwischen Neutron und Proton aus den empirisch bekannten Massendefekten der leichtesten Atomkerne; Voraussetzung ist durchweg, daß zwischen gleichen Teilchen keine Kräfte bestehen. Die Rechnungen sind z. T. bereits von Wigner (dies. Zbl. 6, 238), Feenberg (dies. Zbl. 12, 45), Feenberg und Knipp (dies. Zbl. 13, 41) durchgeführt, aber in sehr knapper Form veröffentlicht; ihre Rechnungen werden in dieser Arbeit ebenfalls ausführlich behandelt. — 1. Für eine Austauschkraft mit dem Potential $-ae^{-br_{ik}}P_{ik}$ (P_{ik} = Permutationsoperator) wird behandelt: Für das Deuteron die strenge Lösung der Schrödingergleichung und die genäherte Eigenfunktion $e^{-\beta r_{12}}$, für das α -Teilchen die Wignersche Eigenfunktion und für das Triton außer der von Wigner und Feenberg benutzten noch zwei bessere. Die beste Triton-E.F. lautet:

$$e^{-\gamma r_{12}-\gamma r_{13}} + \alpha e^{-\beta \gamma r_{12}}(e^{-\gamma r_{13}} + e^{-\gamma r_{23}})$$

(1, 2 = Neutronen, 3 = Proton; für $\alpha = 0$ die E.F. von Wigner und Feenberg). α, β, γ werden durch ein Ritzsches Verfahren bestimmt. Jedem Kern (und jeder E.F.) entspricht dann eine Kurve in der a - b -Ebene. Diese Kurven laufen nahezu parallel; ein allen gemeinsamer Schnittpunkt existiert nicht. Daher wird dieses Kraftgesetz verworfen. — 2. Das Potential sei $-ae^{-b^2 r_{ik}^2}P_{ik}$. Für das Deuteron wird die E.F. $e^{-\beta r_{12}^2}$ gewählt; für das Triton außer der oben genannten noch eine zweite behandelt, die eine einfachere Rechnung gestattet und fast genau so gut ist (S. 423); für das α -Teilchen wieder die gleiche E.F. wie zuvor. Die Kurven in der a — b -Ebene haben jetzt einen einzigen wohldefinierten Schnittpunkt bei $a = 122 mc^2$, $b = 1,61 (e^2/mc^2)^{-1}$. Die zugehörigen Werte für die Konstanten der Triton-E.F. sind $\alpha = 0,86$, $\beta = 0,64$ und $\gamma = 1,28$. Die durch die E.F. definierten Kernradien sind vernünftig. Die Existenz des Schnittpunkts zeigt, daß Feenberg und Knipp nur deshalb keinen gemeinsamen Schnittpunkt erhielten, weil sie eine zu einfache Triton-E.F. zugrunde legten ($\alpha = 0$). Alle von ihnen bezüglich der Kräfte zwischen gleichen Teilchen gezogenen Schlüsse entfallen damit. (Anm. des Ref.: Andererseits zeigen natürlich die Experimente über Streuung von Protonen an Protonen das Vorhandensein solcher Kräfte, die durchaus mit der Neutron-Proton-Kraft vergleichbar sind. Demnach sind die Ergebnisse Dolchs auch noch nicht als endgültig zu betrachten.) — 3. Anwendungen: Der Unterschied der Bindungsenergien von Triton und He^3 rührt nur von der Coulombschen Abstoßung der beiden Protonen des He^3 her. Unter Voraussetzung des Coulombgesetzes auch für kleinste Abstände der beiden Protonen erhält man mit der angegebenen Triton-E.F. als Energieunterschied $1,46 mc^2$, empirisch $(0,9 \pm 0,6) mc^2$. Der Stoßprozeß $D_1^2 + D_1^2 = T_1^3 + H_1^1$ wird nach der (durch Gamowfaktoren verbesserten) Bornschen Näherung behandelt und die berechnete Ausbeute mit der von Oliphant, Hardeck und Rutherford gemessenen verglichen. Der Gang der Ausbeute mit der Energie ist qualitativ richtig, aber die theoretischen Werte um einen Faktor 5 zu klein. Das ist verständlich, da die Bornsche Näherung systematische Fehler in diesem Sinne zeigen muß. — Der Wirkungsquerschnitt für den Stoß Neutron-Proton kann ebenfalls mit Experimenten verglichen werden (von Bonner und Chadwick). Der Vergleich ist für verschiedene Formen des Potentials durchgeführt, bleibt aber noch unbefriedigend. Methode: exakte Berechnung der Phasen aus der Schrödingergleichung für $l = 0$. Flüge.

Kahn, B.: On some further consequences of Fermi's theory of the β -radioactivity. Physica 3, 495—502 (1936).

Es wird eine Note von Wick (dies. Zbl. 11, 282) kritisiert, in der der hohe Wert des Protonenspins auf die virtuelle Erzeugung von Positron und Neutrino zurückgeführt werden sollte. Verf. zeigt, daß mit dem Fermischen Ansatz für die Erzeugung von solchen Teilchen kein Zusatzglied für den Spin zu erwarten ist. Andererseits zeigt er, daß der Fermische Ansatz auch aus anderen Gründen modifiziert werden muß. (In der kritisierten Arbeit war nicht vorausgesetzt worden, daß die Gleichungen gerade die Fermische Form haben. D. Ref.)

R. Peierls (Cambridge).

Klassische Theorie der Elektrizität.

Urbanek, Jean: Le rôle de la vitesse de la lumière dans les équations électro-magnétiques et l'équivalence de l'énergie et de la masse. *J. Physique Radium*, VII. s. 7, 158 bis 162 (1936).

Der Autor schlägt eine neue Methode vor, um symmetrische Dimensionen für elektrische und magnetische Größen zu erhalten, nämlich die Äquivalenz von Masse und Ruheenergie $mc^2 = E$. Willkürlich wird angenommen $m \equiv E$ und das „relativistische Dimensionssystem“ gewonnen, für das zwei Grunddimensionen genügen. [Der Autor scheint nicht gewahr zu sein, daß dies derselbe unerlaubte Schritt ist, der die sog. „absoluten“ Dimensionssysteme kennzeichnet; siehe E. Weber, *Trans. Amer. Inst. Electr. Engr.* 51, 737 (1932).] Ernst Weber (New York).

Guggenheim, E. A.: On magnetic and electrostatic energy. *Proc. Roy. Soc. London A* 155, 49—70 (1936).

Verf. stellt die allgemeinen Formeln auf für die Lagrange- und Hamiltonfunktion der Maxwellschen Elektrodynamik für den Fall, daß die Annahmen $\mathfrak{B}/\mathfrak{H} = \text{konst.}$ und $\mathfrak{D}/\mathfrak{E} = \text{konst.}$ nicht gemacht werden. Kritik anderer Darstellungen. Bechert.

Guggenheim, E. A.: The thermodynamics of magnetization. *Proc. Roy. Soc. London A* 155, 70—101 (1936).

Die wichtigsten thermodynamischen Formeln für magnetische Systeme werden abgeleitet, im Anschluß an den Ausdruck für die magnetische Energie, der in der vorigen Arbeit (vgl. vorstehendes Referat) angegeben wurde. Die magnetische Zustandsgleichung wird allgemein formuliert. Diskussion adiabatischer Änderungen der Magnetisierung. Kritik anderer Darstellungen. Bechert (Gießen).

Šubin, A., und M. Zolotuchin: Zur Frage über die quasiklassische Betrachtung des Ferromagnetismus. *Ž. eksper. teoret. Fis.* 6, 105—109 (1936) [Russisch].

Es wird eine lineare Kette von Elementarmagneten angenommen, die beliebige Richtungen annehmen können, wobei es zwischen je zwei Nachbaratomen eine Wechselwirkungsenergie gibt, die dem \cos des Winkels zwischen ihren Richtungen proportional ist. Die zugehörige klassische Zustandssumme läßt sich auswerten, und es zeigt sich, wie zu erwarten, daß dieses Modell nicht die Eigenschaften eines Ferromagneten hat.

R. Peierls (Cambridge).

Maggi, G. A., e B. Finzi: Condizioni sulla fronte d'onda e onde elettromagnetiche armoniche. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, VI. s. 23, 9—15 (1936).

Ci proponiamo in questa Nota di mostrare quali limitazioni imporgano le condizioni sulla fronte d'onda alle onde generali, soluzioni dell'equazione di d'Alembert, e alle onde elettromagnetiche, con particolare riguardo alle soluzioni armoniche delle equazioni di Maxwell. Autoreferat.

Maggi, G. A.: Onde elettromagnetiche armoniche. *Rend. Semin. mat. fis. Milano* 9, 1—13 (1935).

Stowell, E. Z., and A. F. Deming: The dual nature of modulation. *Philos. Mag.*, VII. s. 21, 947—958 (1936).

Vor einigen Jahren entstand in der englischen Literatur eine Diskussion über die Frage, wie eine modulierte Welle, z. B. ein Radiosignal, physikalisch aufzufassen sei. Einerseits wurde die übliche Auffassung vertreten, nach der ein solches mit einem reinen Tone moduliertes Signal in drei getrennte Signale zerfällt, der Grundwelle mit der Frequenz des unmodulierten Signals und die beiden sog. Seitenbänder, deren Frequenz sich von jener der Grundwelle um den Modulationston unterscheidet. Andererseits wurde behauptet, eine modulierte Welle enthalte nur ein einziges Signal, dessen Amplitude aber mit der Modulationsfrequenz schwankt. Verf. gibt nun einen Beitrag zu dieser Frage, indem er die Einwirkung einer modulierten Welle auf einen einfachen Resonanzkreis untersucht, und zwar einmal ein eintreffendes Signal der zuerst genannten, ein zweites Mal ein eintreffendes Signal der zuletzt genannten Art.

Er zeigt, daß die Wirkung beider Signale auf den Resonanzkreis die gleiche ist und kommt somit zum Schluß, daß physikalisch beide Auffassungen gleichwertig sind.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Brandt, W.: Elektrische Weiche. Elektr. Nachr.-Techn. **13**, 111—123 (1936).

In dieser Arbeit wird zum erstenmal das Problem der elektrischen Weiche systematisch und ohne einschneidende Beschränkungen behandelt und bis zur vollständigen Angabe einer Teillösung durchgeführt, die „beliebig gute“ Weichen zu bauen gestattet und deren Aufwand an Schaltungsmitteln dem minimalen wahrscheinlich nahekommt. Unter einer elektrischen Weiche wird eine passive $n \equiv (m+1)$ -Paar-Reaktanz verstanden mit einem Eingangs- und m Ausgangspaaren von solcher Eigenschaft, daß bei Abschluß aller Paare mit bestimmten konstanten Widerständen gewisse Bereiche $B_1, \dots B_m$ eines dem ersten Paar zugeführten Frequenzgemisches nahezu dämpfungsfrei zum 1-ten, $\dots m$ -ten Paar übertragen werden, dagegen alle anderen Frequenzen nahezu vollständig unterdrückt werden. Während $m=1$ den schon früher ausführlich behandelten Fall des gewöhnlichen Filters (W. Cauer, dies. Zbl. **4**, 320; Bode und Dietzold, dies. Zbl. **11**, 235) darstellt, wird hier der Fall $m=2$ behandelt. Ausgehend vom allgemeinen Reaktanztheorem (W. Cauer, dies. Zbl. **3**, 377; **9**, 423), werden aus der zur Verfügung stehenden Mannigfaltigkeit der $(Z)_3$ - bzw. $(Y)_3$ -Matrizen diejenigen mit Z_{23} bzw. $Y_{23} = 0$ ausgewählt, welche mit der Klasse der durch linksseitige Reihen- bzw. Parallelschaltung zweier Reaktanz-Zweipaare erhaltenen Dreipaare identisch sind. Eine geringfügige Verschärfung der einen Durchlaßteilbedingung (Determinanten der Teilvierpole identisch gleich 1) führt zu einer völlig symmetrischen Fassung der Sperr- und Durchlaßbedingungen. Auf Grund dieser beiden Beschränkungen der Aufgabe lassen sich einerseits alle noch zulässigen Dreipaarmatrizen aus von der Filtertheorie her wohlbekannten Funktionen aufbauen, andererseits läßt sich die numerische Lösung vollständig auf die schon durchgeführte Tschebyscheffsche Näherung des Filterproblems (W. Cauer, Math. Z. **1933**, 1; dies. Zbl. **8**, 19) zurückführen. Zum Schluß werden duale realisierende Schaltungen angegeben und numerische Beispiele durchgerechnet. Die Weichen haben u. a. die interessanten Eigenschaften, daß ihr Eingangswiderstand frequenzunabhängig, ihre 3 Kurzschlußleitwerte bzw. Leerlaufimpedanzen einander gleich sind. — Eine Lösung des Weichenproblems ohne zusätzliche Beschränkungen sowie eine Diskussion des Einflusses der Realisierungsfehler wird in Aussicht gestellt.

Baerwald (Tomsk).

Julia, Roger, et Jean Fallou: Sur l'extension des propriétés du quadripole aux réseaux polyphasés équilibrés les plus généraux. C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 1767—1769 (1936).

Die bekannten Vierpolgleichungen für eine einzige Phase lassen sich ohne weiteres auf ein Mehrphasensystem ausdehnen, wenn man sie auf Spannung und Strom einer Phase am Anfang des Systems einerseits und auf Spannung und Strom derselben Phase am Ausgang des Systems andererseits bezieht. Wenn man annimmt, daß das System keine Energie zerstreut, so gelangt man zur Folgerung, daß der absolute Betrag der Vierpolkoeffizientendeterminante gleich 1 sein muß. Hierbei ist vorausgesetzt, daß die Spannungen Sternspannungen sind. In einem energiezerstreuenden Mehrphasensystem gibt es aber keine einfache Beziehung mehr zwischen den Koeffizienten der Vierpolgleichungen. Zum Beweis wird das studierte System durch ein reguläres äquivalentes System ersetzt, indem alle Verbindungen in Stern geschaltet sind. Dieser Ersatz kann auf Grund zweier vom Verf. genannten Theoreme stets stattfinden. Auf das Ersatzsystem braucht man jetzt nur die Kirchhoffschen Gleichungen anzuwenden, und man findet durch Betrachtung der Koeffizienten des linearen Gleichungssystems den erwähnten Satz über den absoluten Betrag der Koeffizientendeterminante. *Strutt*.

Danilevsky, A.: Sur la distribution du courant dans une électrode cylindrique. Commun. Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff et Soc. Math. Kharkoff, IV. s. **13**, 83—90 u. franz. Zusammenfassung 91 (1936) [Ukrainisch].

Frenkel, J.: On the Tonks' theory of the rupture of the surface of liquid by a uniform electric field in vacuum. *Ž. eksper. teoret. Fis.* 6, 347—350 (1936) [Russisch].

Als Bedingung für das Anzünden eines Bogens (Durchbruch der Oberfläche einer Flüssigkeit durch das elektrische Feld) betrachtet Verf. das Verschwinden der Geschwindigkeit c der Kapillarwellen. Bezeichnet man mit T die Oberflächenspannung (Kapillarspannung) und mit ϱ die Dichte der Flüssigkeit, mit $k = 2\pi/\lambda$ den Betrag des Wellenvektors der Kapillarwelle, so ist bekanntlich $c^2 = \frac{g}{k} + \frac{T}{\varrho} k$. Diese Formel wird vom Verf. auf den Fall eines angelegten elektrischen Feldes E verallgemeinert. Verf. findet:

$$c^2 = \frac{g}{k} + \frac{T}{\varrho} k - \frac{E^2}{4\pi\varrho}.$$

Durch Nullsetzen von c^2 findet man den kritischen Wert von E . Dieser Wert wird am kleinsten für $k = \sqrt{\frac{g\varrho}{T}}$, und zwar wird $E_m^2 = 8\pi\sqrt{g\varrho T}$, in qualitativer Übereinstimmung mit einer von L. Tonks [Physic. Rev. 48, 562 (1935)] gegebenen Formel. *Fock.*

Bowman, F.: Notes on two-dimensional electric field problems. *Proc. London Math. Soc.*, II. s. 41, 271—277 (1936).

Verf. betrachtet das folgende zweidimensionale mathematisch bereits von Moulton gelöste Problem. Zwei Quadrate liegen mit dem gleichen Mittelpunkt so ineinander, daß die Diagonalen des einen die Seiten des anderen senkrecht schneiden. Es wird ein Achtel der entstehenden Figur von der z -Ebene auf die t -Ebene abgebildet mit Hilfe der Transformation

$$dz = \exp(-i\pi/4) dt/t^{1/2}(1-t)^{1/4}(1-k^2t)^{1/2}.$$

Mit Hilfe zweier weiterer Substitutionen gelangt man von der z -Ebene auf die ζ -Ebene durch die Transformation:

$$dz = \frac{\exp(-i\pi/4)\sqrt{2}}{\sqrt{k(k+ik')}} \left\{ \frac{d\zeta}{V\{(1-\zeta^2)(1-\lambda^2\zeta^2)\}} - \frac{d\zeta}{V\{(1-\zeta'^2)(1-\lambda'^2\zeta'^2)\}} \right\}.$$

Das Problem ist somit mittels elliptischer Integrale lösbar, und die Kapazität einer Kondensatoranordnung, dessen Querschnitt die beschriebene Figur in der z -Ebene ist, wird vom Verf. berechnet.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Klassische Optik.

Herzberger, M.: A new theory of optical image formation. *J. Opt. Soc. Amer.* 26, 197—204 (1936).

Betrachtet man in einem rotationssymmetrischen optischen System einen außer-axialen Punkt, so ist durch ihn und die Achse eine Meridianebene bestimmt. Jeder durch den betrachteten Punkt gehende Strahl, der die Achse nicht schneidet und demnach nicht in der Meridianebene liegt, schneidet diese Ebene bildseitig in einem Punkte, den der Verf. als — dem betreffenden Objektpunkt durch den betreffenden Strahl zugeordneten — „Diapunkt“ bezeichnet. Das Verhältnis des Achsenabstandes dieses Diapunktes zum Achsenabstand des Objektpunktes bezeichnet er als „Diavergrößerung“. Wird ein — zur Achse windschiefer — Strahl ausgewählt, so ist durch jeden seiner Punkte im Objektraum eine Meridianebene und demnach zu jedem seiner Punkte eindeutig ein Diapunkt zugeordnet. Der Verf. zeigt dann, daß für die Beziehungen zwischen den Punkten eines solchen windschiefen Strahles und den zugeordneten Diapunkten entsprechende Formeln gültig sind wie für die Gaußsche Optik des par-axialen Strahlenraumes. Als Parameterwerte für das Winkeleikonal benutzt der Verf. hier die Cosinuswerte α, λ, μ der Winkel (Objektstrahl/Rotationsachse), (Objektstrahl/Bildstrahl), (Bildstrahl/Rotationsachse). Die ursprünglich nur für windschiefe Strahlen definierte Zuordnung von Objektpunkt und Diapunkt läßt sich auf Grund

einer abgeleiteten Formel algebraisch erweitern, so daß sie auch für Strahlen gilt, die die Rotationsachse schneiden, sowie für Punkte auf der Rotationsachse. Der Verf. bestimmt sodann die Diapunkte der unendlich fernen Ebene und wendet die Ergebnisse auf das photographische Objektiv, auf das Okular und auf das als „Janus-Objektiv“ bezeichnete optische System an, das vorwärts und rückwärts benutzt von der unendlich fernen Ebene gleich gute Bilder ergibt. Er zeigt, daß es nicht möglich ist, ein von Verzeichnung freies „Janus-Objektiv“ zu konstruieren. Weiter behandelt der Verf. die Bilderzeugung endlicher Objektpunkte sowie Anwendungen auf das Reproduktionsobjektiv.

Picht (Berlin).

Herzberger, M.: An interesting optical law. *J. Opt. Soc. Amer.* **26**, 205 (1936).

Betrachtet man in einem rotationssymmetrischen System einen windschiefen Strahl und den zu ihm optisch konjugierten Strahl des Bildraumes und denkt diesen parallel zur Achse bis zum Schnitt mit dem Objektstrahl und umgekehrt diesen parallel zur Achse bis zum Schnitt mit dem Bildstrahl verschoben, so sind durch die sich schneidenden Strahlen zwei Ebenen — eine im Objekt-, die andere im Bildraum — bestimmt. Ihre Schnittpunkte mit der optischen Achse seien „Zentralpunkte“ genannt. Betrachtet man jetzt auf dem Objektstrahl einen beliebigen Punkt und auf dem Bildstrahl den ihm zugeordneten „Diapunkt“ (vgl. vorsteh. Referat), verbindet diese beiden Punkte mit den zugehörigen Zentralpunkten, so gilt die Beziehung $n'\beta'\sin\eta' = n\sin\eta$, wo η, η' die Winkel der von den Zentralpunkten aus gezogenen Verbindungslinien (mit Objekt- bzw. Diapunkt) zum Objekt- bzw. Bildstrahl sind. β' ist die zugehörige „Diavergrößerung“ bzw. das Verhältnis der genannten Verbindungslinien. n und n' sind die Brechungsindizes des Objekt- und Bildraumes.

Picht (Berlin).

● **Schiele, Wolf-Egbert: Zur Theorie der Luftspiegelungen insbesondere des elliptischen Falles.** (Veröff. d. Geophys. Inst. Leipzig. Hrsg. v. L. Weickmann. Bd. 7, H. 3. 2. Ser. Spezialarbeiten aus dem Geophysikalischen Institut und Observatorium.) Leipzig: Robert Noske 1935. 88 S. u. 15 Fig.

In the first part the author gives an historical survey of the theory of images. First he gives the equations according to Biôt for the light rays in a plane medium (equal refraction indices in any of a system of parallel planes) and in a spherical medium (equal refraction index in any of a system of concentric spheres), and investigates the caustic belonging to a light point. Afterwards he gives, according to Gergonne, the general formulae. He shows the methods of Helmholtz and Tait, and the application of Garboos to explain mirages in this way. A. Hegener deals with the problem under the simplifying assumption that the refraction index is constant in certain layers. — The author investigates first the light rays in an elliptic medium (equal refraction index) in cofocal ellipsoid with the help of Fermat's principle and the methods of the disturbance calculus known from astronomy, without being able to prove the convergence of the successive found approximations and gives for a simple example the solution to the first approximation.

Herzberger (Rochester).

Sokob, Emmerich: Über die Seitenrefraktion. *Z. Vermessgswes.* **65**, 275—292 (1936).

The author investigates the lateral refraction in photogrammetric pictures, their magnitudes and their origin. He gives the differential equation for the horizontal component of the light ray in an inhomogeneous medium, and specializes the medium in considering the variation of refraction index with temperature and pressure.

Herzberger (Rochester).

Soleillet, Paul: Le calcul des taux de polarisation dans les phénomènes de résonance. *J. Physique Radium*, VII. s. 7, 173—180 (1936).

The author continues his investigations on polarization due to optical resonance between the atoms. His methods do not allow him to determine the spin out of the hyperfine structure, but they give a valuable and simple control for these calculations. The author gives a method for simplifying the usual calculations, and some valuable numerical tables.

Herzberger (Rochester).

Laue, M. v.: Die äußere Form der Kristalle in ihrem Einfluß auf die Interferenzerscheinungen an Raumgittern. *Ann. Physik*, V. F. **26**, 55—68 (1936).

Die elementare Theorie der Raumgitterinterferenzen erfordert die Berechnung der dreifachen Summe

$$S(A_1, A_2, A_3) = \sum_{v_1, v_2, v_3} e^{2\pi i(v_1 A_1 + v_2 A_2 + v_3 A_3)},$$

wo die A_i als schiefwinklige Koordinaten im Raum des reziproken Gitters betrachtet werden können und die Summation über alle im Kristall vorkommenden Zellen auszuführen ist. Verf. betrachtet daneben das Integral

$$E(A_1, A_2, A_3) = \int e^{2\pi i(\zeta_1 A_1 + \zeta_2 A_2 + \zeta_3 A_3)} d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3$$

(erstreckt über denselben Bereich) und zeigt, daß die Beziehung gilt:

$$|S| = \frac{\pi A_1}{\sin \pi A_1} \cdot \frac{\pi A_2}{\sin \pi A_2} \cdot \frac{\pi A_3}{\sin \pi A_3} \cdot |E|.$$

Der Integrationsbereich wird nun derart abgeglättet, daß seine Begrenzung eine einfache analytische Fläche wird. Da es genügt, die Werte $|A_i| < \frac{1}{2}$ zu betrachten, sind scharfe Maxima von $|E|$ zugleich solche von $|S|$. Somit reduziert sich das Problem auf die Berechnung von E ; letztere ist aber leicht auszuführen, besonders leicht, wie Verf. zeigt, für Kristalle mit ebenen Grenzflächen. Aus den Eigenschaften des Integrals E (der die dreidimensionale Erweiterung des Fraunhoferschen Integrals über die Beugungsöffnung darstellt) lassen sich allgemeine Sätze über den Intensitätsverlauf in der Nähe eines Gitterpunktes ableiten. Die Resultate werden zur Deutung gewisser Beobachtungen bei Elektronenbeugung verwandt.

V. Fock (Leningrad).

Papapetrou, A.: Vereinfachte Berechnung der strukturellen Doppelbrechung. *Z. Kristallogr. A* **94**, 80—85 (1936).

Verf. betrachtet Felder optischer Frequenz und orthogonale Translationsgitter und befaßt sich mit der Berechnung des Mittelwertes des erregenden Feldes innerhalb einer Elementarzelle. Dabei wird der Satz aufgestellt: „Der Mittelwert des Feldes eines Gitterpunktes M innerhalb einer Elementarzelle Π_0 ist mit dem Felde identisch, welches am Mittelpunkt von Π_0 entsteht, wenn das Moment des Dipols M innerhalb der dem Punkte M entsprechenden Elementarzelle gleichmäßig verteilt ist.“

Fock.

Usiglio, G.: Una nuova interpretazione della propagazione nel secondo mezzo nella riflessione totale. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, VI. s. **23**, 191—197 (1936).

The author gives a survey of the problems of total reflection, and makes the statement, without proof, that there is a wave entering the second medium with rapidly decreasing energy, generating a second wave front which increases with the same rapidity, which is superimposed on the direct reflected wavefront.

Herzberger.

Scherzer, O.: Die schwache elektrische Einzellinse geringster sphärischer Aberration. *Z. Physik* **101**, 23—26 (1936).

Unter Benutzung der Bahngleichungen des Elektrons im Felde elektronenoptischer Linsen bestimmt Verf. Potential und Elektrodenform der sphärisch bestkorrigierten kurzen schwachen Einzellinse. Daraus, daß die sphärische Aberration in einer solchen Linse mit wachsendem Hauptpunktabstand abnimmt, ist zu schließen, daß die bestkorrigierte Linse nicht kurz ist.

Henneberg (Berlin).

Geophysik, Meteorologie, Geodäsie.

Jung, Karl: Bemerkung zur Potentialtheorie des Schwerkraftfeldes. *Z. Geophys.* **12**, 65—66 (1936).

Von der Poissonschen Gleichung ausgehend wird gezeigt, daß die Vernachlässigung des Ausdruckes $4\pi f\rho$ (f = Gravitationskonstante, ρ = Dichte) bei Anwendung der Preyschen Reduktion bei Schweremessungen dieselbe auf die Freiluftreduktion zurückführt. Da diese beiden Reduktionsverfahren wesentlich verschieden sind, sieht man ein, daß eine solche Vernachlässigung nicht zu rechtfertigen ist.

A. Michailov.

Hopfner, F.: Stellungnahme zum vorangehenden Artikel (Potentialtheorie des Schwerfeldes). Z. Geophys. 12, 66—67 (1936).

Es wird erläutert, daß die Vernachlässigung von $4\pi/\rho$ keine Rolle spielt, da es sich lediglich um die Auffindung eines partikulären Integrals für das Störungspotential T des Schwerfeldes handelt, wobei T als harmonische Funktion der Gleichung $\Delta T = 0$ genügt.

A. Michailov (Moskau).

Sokolov, P. T.: Über einige Eigenschaften der Laufzeitfunktion. Gerlands Beitr. Geophys. 47, 267—289 (1936).

Die Laufzeitkurve seismischer Wellen $T = T(\Delta)$ als wichtigstes Mittel der Seismik, über die Geschwindigkeitsverteilung im Erdkörper ($v = v(r)$) Aussage zu machen, wird untersucht. Liegt der Herd in der Erdoberfläche, so erhält man für

$$\Delta = \Delta(c) = 2Rc \int_{r_{\min}}^R \frac{d(\lg r)}{\sqrt{q^2 - c^2}},$$

wo R den Erdradius, $q = nr = r/v$, und $n = 1/v$ und $c = nr \cdot \sin i$ ist. Aus dem Bendorfschen Satz folgt dann $c = R \cdot dT/d\Delta = c(\Delta)$. Die Ableitung der Laufzeitkurve hängt letzten Endes von der Ableitung $\psi(q)$ ab, $\psi(q) = d \lg r/dq$. Für $c = q_0$ folgt $\Delta = 0$. Sämtliche Ableitungen von Δ nach c werden für $\Delta = 0$ unendlich. Für $T = T(\Delta)$ folgt, daß die 2. und 4. Ableitung nach Δ zu 0 werden. Die 1. ist endlich und > 0 . Die 3. ist endlich und < 0 . Für die 5. Ableitung folgt im allgemeinen bei $\Delta = 0$ ein endlicher Wert. — Läßt sich $T = T(\Delta)$ in einem Gebiet $\Delta = 0$ bis $\Delta = \Delta_e$ als konvergente Maclaurinsche Reihe darstellen, dann müssen die ganzzahligen Koeffizienten gleich Null sein und die Reihe lautet: $T = a\Delta + a_3\Delta^3 + a_5\Delta^5 + \dots$. Die Koeffizienten dieser Reihe sind Funktionen der Werte q und ihrer Ableitungen bei $r = R$, wodurch sich q und dessen Ableitungen bei $r = R$ durch die Koeffizienten $a_1, a_3, a_5 \dots$ ausdrücken läßt. Es folgt somit, daß, wenn die Reihe $T = a_1\Delta + a_3\Delta^3 + a_5\Delta^5$ bekannt ist, sich die Reihe für $q = q(r)$ aufstellen läßt: $q = A_0 + (r - R)A_1 + \frac{(r - R)^2}{1.2}A_2$.

Die Funktion $q = q(r)$ erlaubt, die Verteilung der Geschwindigkeit nach der Tiefe hin zu erhalten. Auch für den Fall, daß der Herd nicht in der Erdoberfläche liegt, werden die entsprechenden Formeln abgeleitet. Für die Parameterfunktion $\Delta = \Delta(c)$ folgen zwei verschiedene Ausdrücke, einer für $\Delta < \Delta_m$ und einer für $\Delta > \Delta_m$ (bei Δ_m hat die Laufzeitkurve einen Wendepunkt). Durch analoge Berechnungen, wie oben erwähnt, lassen sich für T entsprechende Reihen aufstellen, worüber ebenfalls die Reihe für die Funktion q folgt: $q = q_m + B_1r - r_m + B_2(r - r_m)^2 + \dots$, woraus sich die Tiefe des Herdes bestimmen läßt, wenn $q_0 = n_R R$ bei $r = R$ aus anderen Beobachtungen bekannt ist, woraus noch einige Folgerungen für $\Delta = \Delta(c)$ sich ergeben.

Brockamp (Potsdam).

Fritsch, Volker: Beiträge zu den Beziehungen zwischen Ausbreitung Hertzseher Wellen und geologischer Beschaffenheit des Untergrundes (Funkgeologie). Grundlagen und Anwendung der Kapazitätsmethode. Beitr. angew. Geophys. 5, 375—395 u. 6, 100 bis 119 (1936).

Sretensky, L. N.: La théorie générale des marées dans un fluide hétérogène. J. Geophys., Moskau 5, 395—407 u. franz. Zusammenfassung 408 (1935) [Russisch].

Die Arbeit ist dem Problem der Integration der Gleichungen für Ebbe und Flut gewidmet. Betrachtet man zwei übereinander gelagerte Flüssigkeitsschichten von der Tiefe h_1 bzw. h_2 auf der Oberfläche einer rotierenden Kugel, so erhält man aus den Lagrangeschen Gleichungen der Hydrodynamik und der Kontinuitätsgleichung nach einigen Vereinfachungen für die Komponenten u_k, v_k der Geschwindigkeit der oberen ($k = 1$) und der unteren ($k = 2$) Schicht ein System von fünf partiellen Differentialgleichungen. Das sind die fundamentalen Gleichungen des Problems. Ausgehend

hiervon untersucht zunächst der Verf. die Schwingungen langer Periode (Flut erster Art). Macht man die Annahme, daß $\zeta_k = Z_k \cos \sigma t$, $u_k = U_k \sin \sigma t$, $v_k = V_k \cos \sigma t$ ist, wobei Z_k , U_k , V_k Funktionen des Breitengrades θ sind, so erhält man zur Bestimmung von Z_k zwei gewöhnliche Differentialgleichungen. Die Größen U_k und V_k kann man in einfacher Weise durch Z_1 und Z_2 ausdrücken. Die Lösungen werden diskutiert, wobei zunächst der Fall eines Behälters betrachtet wird, der von zwei Kreisen berandet ist. Es wird gezeigt, daß das allgemeine Integral mit Hilfe des Integrals für das entsprechende Problem für eine einfache Schicht ausgedrückt werden kann. Es werden ferner die Wellen auf der Trennungsschicht und auf der freien Oberfläche bestimmt. — Analoge Resultate werden im Falle der halbtäglichen Flut gewonnen. — Was die tägliche Flut anbetrifft, so erhält man in diesem Falle eine Verallgemeinerung des Satzes von Laplace.

Stefan Bergmann (Tomsk).

Sezawa, Katsutada, and Kiyoshi Kanai: Damped free oscillation and amplitudes in resonance, with special reference to decay of seiches in straits. Bull. Earthquake Res. Inst. Tokyo 14, 1—8 (1936).

Zur Vereinfachung wird angenommen, daß die beiden Meeresteile und die verbindende Wasserstraße gleichförmige, aber voneinander verschiedene Breiten und Tiefen haben. Der Einfluß der Erdrotation bleibt unberücksichtigt. Die Grenzbedingungen sind, daß an den Enden der Straße die Summe der Wasserspiegelstörungen durch einfallende und reflektierte Welle kontinuierlich sind, und daß dieselbe Bedingung für den Wassertransport gilt. Die Diskussion der recht umfangreichen Ausdrücke für horizontale und vertikale Versetzung zeigt, daß in den Meeresstraßen zwischen den japanischen Inseln (Tugaru, Yura, Akasiseto, Naruto, Simonoseki) erzwungene Resonanz unwahrscheinlich ist wegen des Wertes der Breiten- und Tiefenverhältnisse. Der Faktor für den Abfall freier Schwingungen ist

$$\frac{[(\alpha - \beta)(\alpha' - \beta')]^2}{(\alpha + \beta)(\alpha' + \beta')},$$

worin α^2 und β^2 die Verhältnisse von Tiefe und Breite zwischen Straße und einem Meeresteil bedeuten, α'^2 und β'^2 den reziproken Wert derselben Verhältnisse für den anderen Meeresteil. Die Übereinstimmung zwischen berechnetem und beobachtetem Dämpfungsfaktor ist sehr gut, der beobachtete ist meistens kleiner, da in der Natur die Mündungen der Meeresstraßen nicht so scharf sind, wie für die mathematische Diskussion angenommen werden mußte.

Haurwitz (Toronto).

Haalek, H.: Über eine neue physikalische Erklärung der Ursache des Erd- und Sonnenmagnetismus und des lufterlektrischen Vertikalstromes. Z. Geophys. 12, 112—123 (1936).

Die permanenten Magnetfelder der Erde und der Sonne lassen sich bekanntlich formell durch Rotation elektrischer Ladungen erklären, die z. B. durch Ladungstrennung erzeugt sein könnten, positiv innen, negativ an der Oberfläche. Eine atomphysikalische Möglichkeit dafür vermutet der Verf. aus der Betrachtung der elektrostatischen Kräfte, die in einer ionisierten festen Masse zwischen den Ionen und den freien Elektronen bestehen; bei allgemein hohem Druck und unter der Wirkung eines Druckgradienten soll sich ein positiver Ladungsüberschuß in den Gebieten hohen Drucks, ein negativer in den Gebieten geringeren Drucks ausbilden. Die Elektronen, die infolge dieses Effektes vom Erdinnern nach außen wandern, sollen zu einem kleinen Teil auch die Erdoberfläche durchsetzen und dadurch den lufterlektrisch beobachteten Vertikalstrom erzeugen.

J. Bartels (Eberswalde).

● **Rüfenacht, Julius: Tafeln über Kreissegmentflächen.** Unter besonderer Berücksichtigung der Anforderungen bei Stadtvermessungen. Hrsg. v. Vermessungsamt d. Stadt Bern. Bern: Stämpfli 1936. VIII, 99 S. Frs. 6.—